Ausbreitungsrechnungen für integrierte magnetooptische Wellenleiter

— Methode der finiten Differenzen —

Diplomarbeit

Manfred Lohmeyer

Fachbereich Physik der Universität Osnabrück

Inhalt

1 Einleitung

In der integrierten Optik versucht man, die für Anwendungen in der optischen Nachrichtentechnik oder Datenverarbeitung benötigten Bauteile optischer Systeme in miniaturisierter Form auf gemeinsamen Trägermaterialien zusammenzufassen. Ähnlich den integrierten Schaltkreisen der Elektronik sollen optische „Chips“ entstehen, die die Funktionen mehrerer, sonst üblicherweise getrennter Bauelemente erfüllen. Als Leiterbahnen dienen dabei Schichten oder Rippen mit erhöhtem Brechungsindex auf oder im Substrat, die nach dem Prinzip der Totalreflexion das Licht meistens einer festen Wellenlänge führen können. Aus solchen Schicht– oder Rippenwellenleitern lassen sich weitere Komponenten zusammensetzen, beispielsweise Verzweigungen oder Koppler. Die verschiedenen elektro– und magnetooptischen Effekte erlauben schließlich den Bau von Schaltern oder Modulatoren.

In dieser Arbeit sind insbesondere Wellenleiter mit magnetooptischen Filmen Untersuchungsgegenstand. Nach [5] lassen sich mit entsprechenden Materialien, die den linearen magnetooptischen oder Faraday–Effekt zeigen, optische Dioden oder Isolatoren realisieren: Licht in einer Laufrichtung soll die Struktur passieren können, für die andere Richtung muß das Bauteil sperren.

Zur theoretischen Berechnung der elektromagnetischen Felder in derartigen Strukturen gibt es nun wenigstens zwei grundlegende Ansätze. Ein Wellenleiter mit einem entlang der bevorzugten Laufrichtung des Lichtes konstanten Brechungsindexprofil, ein längshomogener Wellenleiter, kann nur Lichtwellen mit bestimmten Ausbreitungsformen, die sog. Moden, über längere Strecken führen. Die erste Berechnungsart verwendet einen entsprechenden Feldansatz zur Lösung der Maxwell–Gleichungen; man erhält die Modenprofile und ihnen zugeordnete Ausbreitungskonstanten.

Die zweite Art ist die Strahlausbreitungsmethode (Beam Propagation Method, BPM). Nach gewissen Näherungen läßt sich zu einer Vorgabe an einem Ende das elektromagnetische Feld im Rest des Wellenleiters berechnen. In längshomogenen Wellenleitern gewinnt man damit ebenfalls Informationen über die Moden und ihre Ausbreitungskonstanten, berücksichtigt aber zusätzliche Feldanteile, die mit fortschreitender Ausbreitungsdistanz abklingen, abgestrahlt werden. Mit Einschränkungen erlaubt diese Methode, auch längsinhomogene Strukturen zu untersuchen.

Als eine erste Veröffentlichung zur BPM ist [7] zu nennen, ein Überblick zu den daraus enstandenen Algorithmen findet sich beispielsweise in [27]. Die Verfahren lassen sich grob klassifizieren einerseits nach der Art, wie aus den Maxwell–Gleichungen Beziehungen entstehen, die zur Forsetzung einer Feldvorgabe geeignet sind, andererseits nach der Methodik zur Lösung dieser Ausbreitungsgleichungen.

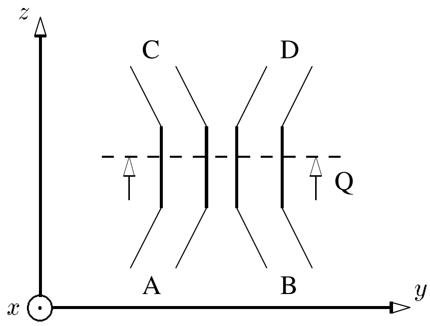
Die Rechnungen dieser Arbeit verwenden die paraxiale oder Fresnel–Näherung, um die Maxwell–Gleichungen auf ein Anfangswertproblem, ein System von gekoppelten Fresnel–Gleichungen zu reduzieren, und die Methode der finiten Differenzen zu dessen Lösung. In längshomogenen Strukturen gehen keine Näherungen ein, die die Polarisation der elektromagnetischen Felder betreffen.

Damit liegen bereits die Inhalte der ersten beiden größeren Teile dieser Arbeit fest: Kapitel 2 stellt die analytischen Grundlagen der BPM zusammen, in Kapitel 3 werden die einzelnen Aspekte wiederaufgegriffen und so formuliert, daß sich eine Implementation unmittelbar anschließen kann. Wenn man sich auf Strukturen und Felder beschränkt, die nur in der Ausbreitungsrichtung und einer dazu senkrechten Richtung veränderlich sind, dann erhält man mit den gleichen Algorithmen, aber wesentlich verringertem Aufwand lösbare Probleme. Kapitel 4 enthält die Resultate der Rechnungen in dieser planaren Situation. Im letzten größeren Teil Kapitel 5 sind schließlich die Rechnungen zu dreidimensionalen Strukturen dokumentiert. Es steht jeweils die Ausbreitungsmethodik im Vordergrund, weniger die eigentlichen physikalischen Ergebnisse.

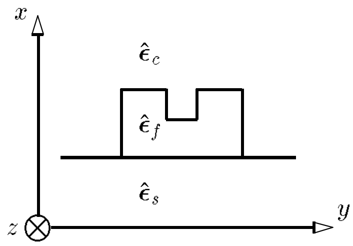
Bedanken möchte ich mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. P. Hertel, bei Dr. A. Erdmann und Dr. M. Shamonin für vielerlei Tips und Anregungen und bei R. Lammers und R. Schoppenhauer für die Hilfestellung beim Umgang mit den Rechnern.

1.1 Problemstellung

Nach [5] könnte ein magnetooptischer Isolator die folgende Geometrie besitzen:



Aufsicht



Querschnitt Q

Auf ein Substrat mit Permittivität $\hat{\epsilon}_s$ sind zwei Rippenwellenleiter mit Permittivität $\hat{\epsilon}_f$ aufgetragen. Über der Anordnung soll sich Luft ($\hat{\epsilon}_c$) befinden. Die Wellenleiter nähern sich unter einem festen kleinen Winkel an, verlaufen über eine gewisse Distanz parallel und entfernen sich danach wieder voneinander. Das Material in den Rippen ist schichtweise senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und parallel zur Substratoberfläche magnetisiert. Alle Abmessungen und Permittivitäten sollen so gewählt sein, daß eine Anregung beispielsweise im Eingang A den Koppler bei C wieder verläßt, eine Anregung in C aber die Wellenleiter wechselt und in B austritt. Die Funktionsweise ist in (2.9) näher erläutert, der längshomogene Mittelabschnitt in (5.5) untersucht.

Diese Struktur legt die Einschränkungen und Näherungen fest, mit denen das Kapitel 2 startet:

- Die Permittivität ändert sich nur schwach in Ausbreitungsrichtung z, wenn man sehr kleine Winkel zwischen den Wellenleitern vorgibt. Der Koppler läßt sich recht plausibel durch eine Struktur mit in Ausbreitungsrichtung stückweise konstanter Permittivität ersetzen.
- Die beteiligten Materialien (siehe [3]) besitzen stark unterschiedliche Brechungsindizes, in den Rippen sind die Permittivitäten nicht diagonal. Zunächst sind deshalb vektorielle Rechnungen notwendig.
- Auf jeder Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung verlaufen die Permittivitätsgrenzen senkrecht zu einer der transversalen Koordinatenachsen x, y. Jeder solche Querschnitt läßt sich in Rechtecke mit darauf konstanter Permittivität einteilen. Analog zum üblichen Vorgehen bei einfachen planaren Strukturen (2.10) bietet sich an, diese Rechteckbereiche einzeln zu behandeln und danach mittels der Stetigkeitsbedingungen der elektromagnetischen Felder an den Grenzflächen zu verknüpfen.
- Es treten nur in y–Richtung transversal magnetisierte Bereiche auf, die Arbeit beschränkt sich auf die eine spezielle Form nichtdiagonaler Permittivitätstensoren.

Zur Notation:
Insbesondere im Abschnitt (3.1) stellt die Schreibweise $\partial_x H$ und $\partial^2_{xy} H$ anstelle von $\dfrac{\partial H}{\partial x}$ und $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x\, \partial y}$ für partielle Ableitungen eine Vereinfachung dar.

Die in den Kapiteln 2 und 3 hergeleiteten Algorithmen wurden in der Programmiersprache C unter dem Betriebssystem UNIX auf den HP-715 Workstation–Rechnern des Fachbereiches implementiert. Alle Angaben zu Rechenzeiten beziehen sich auf diese Maschinen.

2 Grundlagen

Dieses Kapitel stellt die theoretischen Hintergründe der Ausbreitungsrechnungen zusammen. Neben Herleitungen der Ausbreitungs– und Grenzflächengleichungen gehören dazu auch einige Absätze zu Anfangsfeldern und der Auswertung der Rechenergebnisse. Ferner sind Gedanken zur Funktionsweise der in der Einleitung genannten Isolatorstruktur sowie analytische Ergebnisse zu den Moden eines planaren magnetooptischen Schichtwellenleiters enthalten.

2.1 Wellengleichungen

Ausgangspunkt aller folgenden Betrachtungen sind die Maxwell–Gleichungen für ein elektrisches Feld $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, magnetisches Induktionsfeld $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, Magnetfeld $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ und eine dielektrische Verschiebung $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ in einem ungeladenen Medium mit Polarisierung $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ und Magnetisierung $\boldsymbol{\mathcal{M}}$:

$$\mathbf{div}\boldsymbol{\mathcal{D}} = 0, \quad \mathbf{div}\boldsymbol{\mathcal{B}} = 0, \quad \mathbf{rot}\boldsymbol{\mathcal{H}} = \dot{\boldsymbol{\mathcal{D}}}, \quad \mathbf{rot}\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\dot{\boldsymbol{\mathcal{B}}},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{\mathcal{P}}, \quad \boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\mathcal{B}} - \boldsymbol{\mathcal{M}}; \tag{1}$$

μ_0: Induktions–, ϵ_0: Influenzkonstante. Sie müssen durch geeignete Materialgleichungen ergänzt werden. Obige Felder lassen sich in zeitlich periodische Beiträge zerlegen:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(t, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \boldsymbol{E}'(\nu, \boldsymbol{r})\, \mathbf{e}^{\mathrm{i}\nu t}\, d\nu,$$

dabei bezeichnet t das Zeit–, $\boldsymbol{r}$ das Ortsargument. Ebenso sind den Feldern $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ die Zeit–Fouriertransformierten $\boldsymbol{B}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{P}'$ und M' zuzuordnen. Die Maxwell–Gleichungen verknüpfen diese Fouriertransformierten mit Frequenzargument ν am selben Ort gemäß:

$$\mathbf{div}\boldsymbol{D}' = 0, \quad \mathbf{div}\boldsymbol{B}' = 0, \quad \mathbf{rot}\boldsymbol{H}' = i\nu \boldsymbol{D}', \quad \mathbf{rot}\boldsymbol{E}' = -i\nu \boldsymbol{B}',$$

$$\boldsymbol{D}' = \epsilon_0 \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{P}', \quad \boldsymbol{H}' = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}' - M'. \tag{2}$$

Wenn nun die magnetische Suszeptibilität — ein geeignet lineares Medium vorausgesetzt — bei einer optischen Frequenz ν verschwindet, gilt für dieses Frequenzargument die Materialgleichung eines unmagnetischen Materials:

$$\boldsymbol{B}'(\nu, \boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{H}'(\nu, \boldsymbol{r}).$$

Die elektrische Materialgleichung dazu lautet:

$$\boldsymbol{P}'(\nu, \boldsymbol{r}) = \epsilon_0 \hat{\chi}(\nu, \boldsymbol{r}) \boldsymbol{E}'(\nu, \boldsymbol{r}) \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{D}'(\nu, \boldsymbol{r}) = \epsilon_0 \hat{\epsilon}(\nu, \boldsymbol{r}) \boldsymbol{E}'(\nu, \boldsymbol{r}),$$

dabei ist der Permittivitätstensor $\hat{\epsilon}$ gegeben durch $\hat{\epsilon} = \hat{\imath} + \hat{\chi}$, wenn $\hat{\imath}$ den 3×3 – Einheitstensor bezeichnet, und über die dielektrische Suszeptibilität $\hat{\chi}$ unter anderem von festen oder quasistationären äußeren oder nur im Material vorhandenen Magnetfeldern beeinflußt, außerdem orts– und frequenzabhängig.

In diesem Formalismus läßt sich Licht nur einer einzelnen positiven Frequenz ω beispielsweise durch den Ansatz

$$\boldsymbol{E}'(\nu,\boldsymbol{r}) = \sqrt{2\pi}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\delta(\nu-\omega), \quad \nu > 0,$$

modellieren; entsprechende Formeln verknüpfen $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{D}'$ und $\boldsymbol{B}'$ mit den frequenzunabhängigen Größen $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{B}$. Dazu gehören wegen $\boldsymbol{E}'(-\nu,\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{E}'(\nu,\boldsymbol{r}))^*$ physikalische optische Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\,\mathbf{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r})\,\mathbf{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{3}$$

$\boldsymbol{\mathcal{B}}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ und $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ besitzen dieselbe Form, gegebenenfalls sind langsamer veränderliche Anteile zu addieren.

Aus den Maxwell– und Materialgleichungen erhält man jetzt für das elektrische und das Magnetfeld:

$$\mathbf{div}\hat{\epsilon}\boldsymbol{E} = 0, \tag{4}$$

$$\mathbf{div}\boldsymbol{H} = 0, \tag{5}$$

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{H} = \mathrm{i}\omega\epsilon_0\hat{\epsilon}\boldsymbol{E}, \tag{6}$$

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{E} = -\mathrm{i}\omega\mu_0\boldsymbol{H}. \tag{7}$$

Die Rotationsgleichungen (6) und (7) gewährleisten für $\omega > 0$ bereits die Gültigkeit der Divergenzgleichungen (4) und (5), erstere lassen sich zusammenfassen zu

$$\mathbf{rotrot}\boldsymbol{E} = k_0^2\hat{\epsilon}\boldsymbol{E} \tag{8}$$

oder auch

$$\mathbf{rot}\hat{\epsilon}^{-1}\mathbf{rot}\boldsymbol{H} = k_0^2\boldsymbol{H}, \tag{9}$$

mit einer Vakuumwellenzahl $k_0 = \omega/c_0$ und Vakuumlichtgeschwindigkeit $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. Die Größen ω bzw. k_0 werden weiterhin über die zugehörige Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k_0$ vorgegeben.

(8) und (9) sind für die weiteren Untersuchungen gleichwertig; $\boldsymbol{H}$ ist jedoch im Gegensatz zu $\boldsymbol{E}$ an den noch zu behandelnden Grenzflächen uneingeschränkt stetig, so daß sich die Verwendung von (9) anbietet. Außerdem läßt sich damit die unter dem magnetooptischen Aspekt in planaren Strukturen interessantere TM–Polarisation (2.6) bequemer beschreiben.

Der Permittivitätstensor $\hat{\epsilon}$ erhält erst durch geeignete Koordinaten eine konkrete Form: Im gesamten folgenden Teil der Arbeit soll die z–Achse eines kartesischen Koordinatensystems mit Achsenbezeichnungen x, y, z die sogenannte Ausbreitungsrichtung, die bevorzugte Laufrichtung des Lichtes in der untersuchten Struktur, bezeichnen. Die transversalen Koordinatenachsen x, y sind so zu orientieren, daß Grenzflächen zwischen Bereichen mit unterschiedlicher Permittivität immer parallel zu einer dieser Achsen liegen. Außerdem soll die y–Achse so gerichtet sein, daß sie in Bereichen mit einer statischen Magnetisierung in Richtung dieser Magnetisierung bzw. entgegengesetzt weist. Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung werden als (Wellenleiter–) Querschnitte bezeichnet. Wie schon in (1.1) angedeutet, beschränkt sich aus Gründen der Einfachheit alles Weitere zunächst auf Strukturen, deren Permittivitätsprofil in Ausbreitungsrichtung konstant ist, sog. längshomogene Strukturen. Nur leicht längsinhomogene Wellenleiter können —

unter starken Einschränkungen — mit den nachfolgend beschriebenen Methoden näherungsweise ebenfalls untersucht werden.

$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ hat dann bis auf Grenzflächen parallel zur x– bzw. y–Achse auf rechteckigen Bereichen eines jeden Querschnitts die Gestalt

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & \mathrm{i}m \\ 0 & \epsilon & 0 \\ -\mathrm{i}m & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \tag{10}$$

mit reellen Konstanten ϵ, m [5]. Für bestimmte Materialien stimmen die Diagonalelemente des Tensors nicht exakt überein [3], (10) sollte dennoch eine ausreichende Näherung sein. Die Außerdiagonalelemente modellieren den Faraday–Effekt des betrachteten Strukturbereiches; die Gestalt dieses Gyrationsanteils des Tensors ist beispielsweise in [13] erklärt. m ist mit der spezifischen Faraday–Rotation θ_F des Materials bis auf Vorzeichen über $m = \pm n\lambda\theta_F/\pi$ verknüpft, wenn n den Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon}$ angibt. Die Permittivität von isotropen Strukturbereichen ohne Faraday–Effekt wird durch (10) ebenfalls erfaßt. In der weiteren Arbeit meint das Tupel (ϵ, m) als Permittivitätsangabe die Form (10) mit Außerdiagonalelementen zu m und den Werten ϵ in der Diagonalen.

Im allgemeinen ist m verglichen mit ϵ sehr klein [3], z.B. $m/\epsilon \approx 1/1000$, so daß es ausreichen sollte, nur lineare Terme in m bzw. m/ϵ zu betrachten. Danach schreibt sich beispielsweise der inverse Permittivitätstensor als

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{-1} = \frac{1}{\epsilon}\hat{\mathbf{1}} + \hat{\boldsymbol{m}}, \quad \text{wenn } \hat{\boldsymbol{m}} \text{ die Matrix} \quad \hat{\boldsymbol{m}} = \mathrm{i}\frac{m}{\epsilon^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

bezeichnet.

Die Differentialgleichungen (6), (7) für $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ und damit auch ihre Lösungen ändern sich nicht, wenn man im Ansatz (3) zu rückwärtslaufenden Wellen nach $t \to -t$, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \to \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \to -\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ übergeht, sofern $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ dabei gleichbleibt. Eine quasistatische Magnetisierung bzw. ein festes (äußeres) Magnetfeld im Material trägt jedoch dann verglichen mit dem optischen Magnetfeld mit anderen Vorzeichen zum Gesamtmagnetfeld bei, so daß m ebenfalls daß Vorzeichen wechseln muß [13]. Es können sich in den beiden Richtungen — willkürlich als vorwärts und rückwärts bezeichnet — verschiedene Formen der Lichtausbreitung ergeben.

Gleichung (9) läßt sich nun für Punkte innerhalb von rechteckigen Stäben, den in Ausbreitungsrichtung fortgesetzten Rechtecksegmenten eines Querschnitts mit darin konstanter Permittivität, noch etwas umformen. Es gilt:

$$\mathbf{rot}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{-1}\mathbf{rot}\boldsymbol{H} = -\frac{1}{\epsilon}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{H} + \mathbf{rot}\hat{\boldsymbol{m}}\mathbf{rot}\boldsymbol{H} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{rot}\hat{\boldsymbol{m}}\mathbf{rot}\boldsymbol{H} = \mathrm{i}\frac{m}{\epsilon^2}\partial_y\mathbf{rot}\boldsymbol{H},$$

und das führt auf

$$\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{H} + k_0^2\epsilon\boldsymbol{H} = \mathrm{i}\frac{m}{\epsilon}\partial_y\mathbf{rot}\boldsymbol{H}. \tag{12}$$

Der Rest der Arbeit befaßt sich mit der Suche nach solchen Lösungen dieser Gleichung, die nach Vorgabe von $\boldsymbol{H}$ und $\partial_z\boldsymbol{H}$ auf einem Anfangsquerschnitt $z = z_0$ für $z \to +\infty$ keine in negativer Ausbreitungsrichtung laufenden Feldanteile enthalten. Damit wird die Vorstellung einer Lichtquelle im Bereich $z < z_0$ und ausschließlich passiver Bauelemente im Gebiet $z > z_0$ berücksichtigt. Die Abstrahlungsbedingung ist erfüllt, wenn man bereits im Nahbereich $z > z_0$ die mit der BPM berechnete Lösung auf nur die eine Laufrichtung beschränkt. Dadurch entfällt die Notwendigkeit, die Feldableitungen $\partial_z\boldsymbol{H}$ auf dem Anfangsquerschnitt vorzugeben, wie sich im nächsten Abschnitt erweist.

2.2 Reduktion auf ein Ausbreitungsproblem

Mit Hilfe der sogenannten „slowly varying envelope approximation“ ([4]) erhält man aus (12) nach Abspaltung einer harmonischen z–Abhängigkeit von $\boldsymbol{H}$ und Weglassen der zweiten partiellen z–Ableitung des Restes eine Differentialgleichung erster Ordnung in z, ein Anfangswertproblem. Etwas tiefere Einsicht in die dabei eingehenden Näherungen bietet eine auf Green'schen Funktionen aufbauende Betrachtung nach [25]. Darin wird zunächst ein fester Referenz–Brechungsindex $n_r = \sqrt{\epsilon_r}$ eingeführt und der sich aus der Differenz zur Permittivität auf dem betrachteten Segment ergebende Term der rechten Seite zugeordnet. (12) schreibt sich damit als:

$$\boldsymbol{\Delta H} + k_0^2 \epsilon_r \boldsymbol{H} = \mathbf{R}\boldsymbol{H} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R}\boldsymbol{H} = k_0^2(\epsilon_r - \epsilon)\boldsymbol{H} + \mathrm{i}\frac{m}{\epsilon}\partial_y \mathbf{rot}\boldsymbol{H}. \tag{13}$$

ϵ_r bzw. n_r müssen so festgelegt werden, daß die rechte Seite möglichst klein bleibt; dabei ist die genaue Wahl etwas willkürlich und Gegenstand von verschiedenen Studien zur Ausbreitungsmethode [15], [2] (dort in isotropen Medien). Für bestimmte Strukturen — z.B. einmodige längshomogene Wellenleiter oder den in (4.4) untersuchten Koppelabschnitt — läßt sich n_r in gewissem Sinne optimal festlegen. In jedem Fall ist das ermittelte Feld davon abhängig.

Mit einer innerhalb eines Stabes als gegeben gedachten Lösung zu (13) kann man die rechte Seite als Störung oder Quellterm zu den dann enkoppelten skalaren Wellengleichungen ansehen. Eine solche Helmholtz–Gleichung ist zunächst zu untersuchen.

ψ sei Lösung der Gleichung

$$\boldsymbol{\Delta}\psi + k_0^2 \epsilon_r \psi = 0 \tag{14}$$

zu Randwerten auf den Seitenflächen $x = \pm L_x$, $y = \pm L_y$ eines Rechteckstabes $\{(x, y, z)| - L_x \leq x \leq L_x, -L_y \leq y \leq L_y\}$ innerhalb dieses Volumens. ψ läßt sich in den transversalen Koordinaten in eine doppelte Fourierreihe entwickeln:

$$\psi(x, y, z) = \sum_{l,n=-\infty}^{\infty} f_{l,n}(z)\, \mathbf{e}^{\mathrm{i}(\alpha_l x + \beta_n y)} \quad \text{mit} \quad \alpha_l = \frac{l\pi}{L_x}, \beta_n = \frac{n\pi}{L_y},$$

und

$$f_{l,n}(z) = \frac{1}{2L_x}\frac{1}{2L_y}\int_{-L_x}^{L_x}\int_{-L_y}^{L_y} \psi(x, y, z)\, \mathbf{e}^{-\mathrm{i}(\alpha_l x + \beta_n y)}\, dx\, dy$$

und in der Ausbreitungsrichtung ebenfalls zerlegen:

$$f_{l,n}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{l,n}(k_z)\, \mathbf{e}^{\mathrm{i}k_z z}\, dk_z \quad \text{für} \quad \chi_{l,n}(k_z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_{l,n}(z)\, \mathbf{e}^{-\mathrm{i}k_z z}\, dk_z.$$

Damit hat ψ die Gestalt

$$\psi(x, y, z) = \sum_{l,n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{l,n}(k_z)\, \mathbf{e}^{\mathrm{i}(\alpha_l x + \beta_n y + k_z z)}\, dk_z.$$

Eingesetzt in die Wellengleichung (14) führt diese Form auf die Beziehung:

$$\sum_{l,n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{l,n}(k_z)(k_0^2\epsilon_r - \alpha_l^2 - \beta_n^2 - k_z^2)\, \mathbf{e}^{\mathrm{i}(\alpha_l x + \beta_n y + k_z z)}\, dk_z = 0$$

oder

$$\chi_{l,n}(k_z) = 0 \quad \text{für} \quad k_z \neq \pm\sqrt{k_0^2\epsilon_r - \alpha_l^2 - \beta_n^2}.$$

Beschränkt man ψ und die Randbedingungen auf Überlagerungen von in positiver Ausbreitungsrichtung laufenden Wellen, bleibt nur das negative Vorzeichen:

$$\chi_{l,n}(k_z) = 0 \quad \text{für} \quad k_z \neq \kappa_{l,n} := -\sqrt{k_0^2\epsilon_r - \alpha_l^2 - \beta_n^2}.$$

Es ergibt sich eine Differentialgleichung für f:

$$\partial_z f_{l,n}(z) = \mathrm{i}\kappa_{l,n} f_{l,n}(z)$$

die gelöst wird durch

$$f_{l,n}(z) = f_{l,n}(0)\,\mathbf{e}^{\mathrm{i}\kappa_{l,n}z} \quad \text{und} \quad \partial_z f_{l,n}(z) = \mathrm{i}\kappa_{l,n} f_{l,n}(0)\,\mathbf{e}^{\mathrm{i}\kappa_{l,n}z}.$$

Das bedeutet für das Feld ψ:

$$\partial_z\psi(x,y,z) = \sum_{l,n=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}\kappa_{l,n} f_{l,n}(0)\,\mathbf{e}^{\mathrm{i}(\alpha_l x + \beta_n y + \kappa_{l,n}z)}.$$

In der *paraxialen* oder Fresnel'schen Näherung

$$\frac{\alpha_l^2 + \beta_n^2}{k_0^2\epsilon_r} \ll 1 \quad \text{für alle } l,\, n \text{ mit } f_{l,n} \text{ wesentlich von 0 verschieden} \tag{15}$$

ist

$$\kappa_{l,n} \approx -k_0 n_r \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_l^2 + \beta_n^2}{k_0^2 n_r^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{\alpha_l^2 + \beta_n^2}{k_0^2 n_r^2}\right)^2 - \ldots\right).$$

Damit bleibt als Differentialgleichung erster Ordnung in z für die innerhalb der Stäbe ohne Quellterme ungekoppelten Feldkomponenten der Ausdruck

$$\partial_z\psi(x,y,z) = \sum_{l,n=-\infty}^{\infty} -\mathrm{i}\left(k_0 n - \frac{1}{2k_0 n_r}\left(\alpha_l^2 + \beta_n^2\right)\right) f_{l,n}(0)\,\mathbf{e}^{\mathrm{i}(\alpha_l x + \beta_n y + \kappa_{l,n}z)}$$

oder

$$\partial_z\psi = -\mathrm{i}\left(k_0 n_r + \frac{1}{2k_0 n_r}\left(\partial_{x^2}^2 + \partial_{y^2}^2\right)\right)\psi \tag{16}$$

übrig. Obige Betrachtung wird durch die Lage des Querschnitts um die Ursprünge von x– und y–Achse vereinfacht, ist aber von der genauen Lage in der x–y–Ebene unabhängig.

In einem zweiten Schritt ist die Quellgleichung (13) ebenso zu reduzieren. Feldwerte auf den Seitenflächen eines Rechteckstabes mit konstanter Permittivität im Inneren sollten unter Beachtung von Strahlungsbedingungen im Unendlichen das Magnetfeld $\boldsymbol{H}$ sowohl im Stab wie auch außerhalb durch die Quellgleichung festlegen. $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r})$ bezeichne den zugehörigen Quellterm $(\mathbf{R}\boldsymbol{H})(\boldsymbol{r})$. Die Änderung in Ausbreitungsrichtung des Feldes im Stab unter Berücksichtigung des gedachten Feldes außerhalb läßt sich nun zumindest näherungsweise berechnen.

Für gegebenes festes z kann das Magnetfeld im folgenden Sinne aufgespalten werden: Wenn $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ mit $\boldsymbol{r}' = (x', y', z')$, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung (13) einer Punktstörung bezeichnet:

$$\Delta G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k_0^2 n_r^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'),$$

dann löst die Funktion

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \iiint G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}')\, d^3r'$$

die ursprüngliche Gleichung (13). Mit $\theta(s) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad s < 0 \\ 1/2 & \text{für} \quad s = 0 \\ 1 & \text{für} \quad s > 0 \end{cases}$ schreibt sich die Aufspaltung als:

$$\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{r}) = \iiint G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\theta(z - z')\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}')\, d^3r', \quad \boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{r}) = \iiint G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\theta(z' - z)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}')\, d^3r',$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2.$$

In Ausbreitungsrichtung differenziert:

$$\partial_z \boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{r}) = \iiint \partial_z G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\theta(z - z')\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}')\, d^3r' + \iiint G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\delta(z - z')\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}')\, d^3r'.$$

Für festes z und gegebene Anfangsbedingung $\boldsymbol{H}_1(x, y, z)$ erfüllt

$$\boldsymbol{H}_1^A(x, y, z'') = \iiint G(x, y, z''; \boldsymbol{r}')\boldsymbol{l}(\boldsymbol{r}')\, d^3r' \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{l}(\boldsymbol{r}') = \theta(z - z')\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}')$$

im Bereich $z'' > z$ komponentenweise die homogene Wellengleichung (14) (dort verschwindet der zu diesem Feldanteil gehörende Quellterm $\boldsymbol{l}$), d.h. der erste Integralterm ist:

$$\begin{aligned} \iiint \partial_z G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\theta(z - z')\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}')\, d^3r' &= \partial_{z''} \boldsymbol{H}_1^A(x, y, z) \\ &= \left(-\mathrm{i}k_0 n_r - \frac{\mathrm{i}}{2k_0 n_r}\left(\partial_{x^2}^2 + \partial_{y^2}^2\right)\right) \boldsymbol{H}_1(x, y, z). \end{aligned}$$

$\boldsymbol{p}$ hat nach Ansatz für die gesuchte Lösung $\boldsymbol{H}$ die Form $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}) = (\mathbf{R}\boldsymbol{H})(\boldsymbol{r})$; demnach wird der zweite Term zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) &:= \iiint G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\delta(z - z')(\mathbf{R}\boldsymbol{H})(\boldsymbol{r}')\, d^3r' \\ &= \iint G(\boldsymbol{r}; x', y', z)(\mathbf{R}\boldsymbol{H})(x', y', z)\; dx'\, dy'. \end{aligned}$$

Durch diesen Term wird die Änderung $\partial_z \boldsymbol{H}_1$ mit dem Anteil $\boldsymbol{H}_2$ der Lösung verkoppelt. Die Störung $\mathbf{R}$ soll nun so beschaffen sein, daß der Einfluß des reflektierten Feldes $\boldsymbol{H}_2$ auf die Ableitung vernachlässigt werden kann. Insbesondere reduziert diese Vereinfachung das ursprüngliche Randwertproblem auf eine Differentialgleichung erster Ordnung in der Ausbreitungskoordinaten für $\boldsymbol{H} \approx \boldsymbol{H}_1$.

Der Korrekturterm $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ läßt sich mit einer konkreten Form der beteiligten Green'schen Funktion G weiter analysieren:
Es gilt bis auf Lösungen der homogenen Wellengleichung:

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k_0 n_r|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

denn

$$\boldsymbol{\Delta} G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \frac{k_0^2 n_r^2\,\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k_0 n_r|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},$$

d.h.

$$\boldsymbol{\Delta} G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k_0^2 n_r^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = 0, \quad \text{falls} \quad \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}',$$

und nach dem Gauß'schen Satz ist für ein Volumen V

$$\iiint\limits_V \boldsymbol{\Delta} G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k_0^2 n_r^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\, d^3 r = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad \boldsymbol{r}' \notin V \\ 1 & \text{wenn} \quad \boldsymbol{r}' \in V. \end{cases}$$

Demnach ergibt sich $\boldsymbol{B}$ als Faltung

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \iint_{-\infty}^{\infty} -\frac{\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k_0 n_r\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}}{4\pi\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\,(\mathbf{R}\boldsymbol{H})(x',y',z)\,dx'\,dy',$$

fouriertransformiert:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}[\boldsymbol{B}](k_x,k_y) = -2\pi\boldsymbol{\mathcal{F}}\left[\frac{\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k_0 n_r\sqrt{x^2+y^2}}}{4\pi\sqrt{x^2+y^2}}\right](k_x,k_y)\,\boldsymbol{\mathcal{F}}[\mathbf{R}\boldsymbol{H}](k_x,k_y).$$

Es ist

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}\left[\frac{\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k_0 n_r\sqrt{x^2+y^2}}}{4\pi\sqrt{x^2+y^2}}\right](k_x,k_y) = \frac{-\mathrm{i}}{4\pi\sqrt{k_0^2 n_r^2 - k_x^2 - k_y^2}}\,.$$

Dieser Ausdruck läßt sich durch eine für $k_x^2 + k_y^2 < k_0^2 n_0^2$ konvergente Potenzreihe in $\dfrac{k_x^2+k_y^2}{k_0^2 n_r^2}$ ersetzen:

$$\frac{-\mathrm{i}}{4\pi\sqrt{k_0^2 n_r^2 - k_x^2 - k_y^2}} = \frac{-\mathrm{i}}{4\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a_j(k_x^2+k_y^2)^j}{b_j(k_0 n_r)^{2j+1}}$$

mit

$$a_j = \begin{cases} 1 & \text{falls} \;\; j=0, \\ \prod_{l=1}^{j}(2l-1) & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \quad b_j = \begin{cases} 1 & \text{falls} \;\; j=0, \\ \prod_{l=1}^{j} 2l & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach dem Differentiationssatz für Fouriertransformationen gilt:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{a_j}{b_j}(k_0n_r)^{-2j-1}\sum_{p=0}^{j}\frac{j!}{p!(j-p)!}\left.\frac{\partial^{2j}(\mathbf{R}\boldsymbol{H})}{\partial x^{2p}\partial y^{2(j-p)}}\right|_{\boldsymbol{r}}.$$

Unter der Annahme nur schwacher transversaler Brechungsindexänderungen im Inneren der Stäbe, für geringe Abweichungen $|n_r - n|$ und für angenähert paraxiale Strahlausbreitung (der zweite Term in $\mathbf{R}$ ist wegen m nur klein) vernachlässigt man die Ableitungen $\dfrac{\partial^{2j}(\mathbf{R}\boldsymbol{H})}{\partial x^{2p}\,\partial y^{2(j-p)}}$ und berücksichtigt nur den ersten Summand obiger Entwicklung. $\boldsymbol{B}$ erhält dadurch die einfache Form:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \approx \frac{\mathrm{i}}{2k_0n_r}(\mathbf{R}\boldsymbol{H})(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\mathrm{i}k_0}{2n_r}(\epsilon_r-\epsilon)\boldsymbol{H} - \frac{1}{2k_0n_r}\frac{m}{\epsilon}\partial_y\mathbf{rot}\boldsymbol{H}\right)(\boldsymbol{r}).$$

Innerhalb der Rechteckstäbe bleibt die Ausbreitungsgleichung

$$\partial_z\boldsymbol{H} = -\mathrm{i}k_0\left(\frac{\epsilon_r+\epsilon}{2n_r}\right)\boldsymbol{H} - \frac{\mathrm{i}}{2k_0n_r}\left(\partial^2_{x^2}+\partial^2_{y^2}\right)\boldsymbol{H} - \frac{1}{2k_0n_r}\frac{m}{\epsilon}\partial_y\mathbf{rot}\boldsymbol{H} \tag{17}$$

übrig, ein System von drei gekoppelten linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in der Ausbreitungskoordinaten z. Zur Erinnerung: ϵ_r bzw. n_r sind Referenzwerte für Permittivität bzw. Brechzahl.

2.3 Skalierungen

Um nur schwächere Variationen in Ausbreitungsrichtung berechnen zu müssen, spaltet man von der magnetischen Feldstärke eine harmonische z–Abhängigkeit ab:

$$\boldsymbol{H}(x,y,z) =: \boldsymbol{F}(x,y,z)\,\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k_0n_rz} \tag{18}$$

Damit ergeben sich aus Gleichung (17) drei Ausbreitungsgleichungen für die Komponenten der Modulation $\boldsymbol{F}$ des Magnetfeldes:

$$\begin{aligned}\partial_zF_x \;&=\; \mathrm{i}k_0\left(\frac{\epsilon_r-\epsilon}{2n_r}\right)F_x - \frac{\mathrm{i}}{2k_0n_r}\left(\partial^2_{x^2}+\partial^2_{y^2}\right)F_x\\ &\quad - \frac{1}{2k_0n_r}\frac{m}{\epsilon}\left(\partial^2_{y^2}F_z - \partial^2_{yz}F_y + \mathrm{i}k_0n_r\partial_yF_y\right),\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\partial_zF_y \;&=\; \mathrm{i}k_0\left(\frac{\epsilon_r-\epsilon}{2n_r}\right)F_y - \frac{\mathrm{i}}{2k_0n_r}\left(\partial^2_{x^2}+\partial^2_{y^2}\right)F_y\\ &\quad - \frac{1}{2k_0n_r}\frac{m}{\epsilon}\left(\partial^2_{yz}F_x - \partial^2_{xy}F_z - \mathrm{i}k_0n_r\partial_yF_x\right),\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\partial_zF_z \;&=\; \mathrm{i}k_0\left(\frac{\epsilon_r-\epsilon}{2n_r}\right)F_z - \frac{\mathrm{i}}{2k_0n_r}\left(\partial^2_{x^2}+\partial^2_{y^2}\right)F_z\\ &\quad - \frac{1}{2k_0n_r}\frac{m}{\epsilon}\left(\partial^2_{xy}F_y - \partial^2_{y^2}F_x\right).\end{aligned} \tag{21}$$

Weiterhin lassen sich mit Hilfe der dimensionslosen Koordinaten $p = k_0x$, $q = k_0y$ und $s = k_0z$ die Konstanten k_0 einsparen. Ausbreitungs– und Grenzflächengleichungen (26) sind linear; ein reales Modulationsfeld $\boldsymbol{F}$ ergibt sich aus den Resultaten der numerischen Rechnungen erst nach Multiplikation mit einer an das modellierte Anfangsfeld angepaßten Trägerfeldstärke H_R. Nach der Ersetzung

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} (p,q,s) = \frac{1}{H_R}\boldsymbol{F}(p/k_0, q/k_0, s/k_0) \tag{22}$$

bezeichnen u, v und w die dimensionslosen Komponenten F_x, F_y, F_z des Modulationsfeldes. Die Gleichungen (19) bis (21) erhalten damit die der Implementierung zugrundeliegende Form

$$\partial_s u = \mathrm{i}\left(\frac{\epsilon_r - \epsilon}{2n_r}\right) u - \frac{\mathrm{i}}{2n_r}\left(\partial^2_{p^2} + \partial^2_{q^2}\right) u - \frac{1}{2n_r}\frac{m}{\epsilon}\left(\partial^2_{q^2} w - \partial^2_{qs} v + \mathrm{i}n_r\partial_q v\right), \tag{23}$$

$$\partial_s v = \mathrm{i}\left(\frac{\epsilon_r - \epsilon}{2n_r}\right) v - \frac{\mathrm{i}}{2n_r}\left(\partial^2_{p^2} + \partial^2_{q^2}\right) v - \frac{1}{2n_r}\frac{m}{\epsilon}\left(\partial^2_{qs} u - \partial^2_{pq} w - \mathrm{i}n_r\partial_q u\right), \tag{24}$$

$$\partial_s w = \mathrm{i}\left(\frac{\epsilon_r - \epsilon}{2n_r}\right) w - \frac{\mathrm{i}}{2n_r}\left(\partial^2_{p^2} + \partial^2_{q^2}\right) w - \frac{1}{2n_r}\frac{m}{\epsilon}\left(\partial^2_{pq} v - \partial^2_{q^2} u\right). \tag{25}$$

2.4 Feldverhalten an Permittivitätssprüngen

An einer ungeladenen Grenzfläche zweier Medien mit Flächennormalen $\boldsymbol{f}$ erfüllen die elektromagnetischen Felder die folgenden Stetigkeitsbedingungen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}\times(\boldsymbol{\mathcal{E}}^+ - \boldsymbol{\mathcal{E}}^-) &= 0, & \boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{\mathcal{D}}^+ - \boldsymbol{\mathcal{D}}^-) &= 0, \\ \boldsymbol{f}\times(\boldsymbol{\mathcal{H}}^+ - \boldsymbol{\mathcal{H}}^-) &= 0, & \boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{\mathcal{B}}^+ - \boldsymbol{\mathcal{B}}^-) &= 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Die Indizes $\pm$ unterscheiden — im Sinne geeigneter Grenzwerte — Feldstärkewerte der angrenzenden Bereiche konstanter Permittivitäten $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^+$,$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^-$ auf der ebenen Grenzfläche. Im Falle für die optischen Felder linearer und nichtmagnetischer Dielektrika ergeben sich daraus nach Beschränkung auf eine feste Frequenz die Beziehungen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}\times(\boldsymbol{E}^+ - \boldsymbol{E}^-) &= 0, & \boldsymbol{f}\cdot(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^+\boldsymbol{E}^+ - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^-\boldsymbol{E}^-) &= 0, \\ \boldsymbol{f}\times(\boldsymbol{H}^+ - \boldsymbol{H}^-) &= 0, & \boldsymbol{f}\cdot(\boldsymbol{H}^+ - \boldsymbol{H}^-) &= 0, \end{aligned} \tag{27}$$

und mit Hilfe der Maxwell–Gleichung (6) bei Permittivitäten der Form (10)

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^\pm = \begin{pmatrix} \epsilon^\pm & 0 & \mathrm{i}m^\pm \\ 0 & \epsilon^\pm & 0 \\ -\mathrm{i}m^\pm & 0 & \epsilon^\pm \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^\pm)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\epsilon^\pm & 0 & -\mathrm{i}m^\pm/(\epsilon^\pm)^2 \\ 0 & 1/\epsilon^\pm & 0 \\ \mathrm{i}m^\pm/(\epsilon^\pm)^2 & 0 & 1/\epsilon^\pm \end{pmatrix}$$

die Stetigkeitsbedingungen für das Magnetfeld und seine Ableitungen. Nach der Spezifikation in (1.1) bleiben zwei Spezialfälle zu untersuchen:

- *Horizontale* Grenzflächen $\boldsymbol{f} = (1,0,0)$:
  Abgesehen von E_x sind sämtliche Komponenten zu $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ stetig, auf den Punkten solcher Flächen muß gelten:

$$\begin{aligned} & \mathrm{i}\frac{m^+}{(\epsilon^+)^2}\left(\partial_y H_z - \partial_z H_y\right) + \frac{1}{\epsilon^+}\left((\partial_x H_y)^+ - \partial_y H_x\right) \\ = \; & \mathrm{i}\frac{m^-}{(\epsilon^-)^2}\left(\partial_y H_z - \partial_z H_y\right) + \frac{1}{\epsilon^-}\left((\partial_x H_y)^- - \partial_y H_x\right), \end{aligned} \tag{28}$$

$$\frac{1}{\epsilon^+}\left(\partial_z H_x - (\partial_x H_z)^+\right) = \frac{1}{\epsilon^-}\left(\partial_z H_x - (\partial_x H_z)^-\right). \tag{29}$$

Mit den Bezeichnungen und in den Koordinaten aus (2.3) lauten diese Gleichungen:

$$\begin{aligned} & \mathrm{i}\frac{m^+}{(\epsilon^+)^2}\left(\partial_q w - \partial_s v + \mathrm{i}n_r v\right) + \frac{1}{\epsilon^+}\left((\partial_p v)^+ - \partial_q u\right) \\ = \; & \mathrm{i}\frac{m^-}{(\epsilon^-)^2}\left(\partial_q w - \partial_s v + \mathrm{i}n_r v\right) + \frac{1}{\epsilon^-}\left((\partial_p v)^- - \partial_q u\right), \end{aligned} \tag{30}$$

$$\frac{1}{\epsilon^+}\left(\partial_s u - \mathrm{i}n_r u - (\partial_p w)^+\right) = \frac{1}{\epsilon^-}\left(\partial_s u - \mathrm{i}n_r u - (\partial_p w)^-\right). \tag{31}$$

- *Vertikale* Grenzflächen $\boldsymbol{f} = (0, 1, 0)$:
  Alle Feldkomponenten mit Ausnahme von E_y sind stetig; in den Punkten der Grenzfläche bleibt zu erfüllen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon^+}\left((\partial_y H_z)^+ - \partial_z H_y\right) - \mathrm{i}\frac{m^+}{(\epsilon^+)^2}\left(\partial_x H_y - (\partial_y H_x)^+\right) \\ = \; & \frac{1}{\epsilon^-}\left((\partial_y H_z)^- - \partial_z H_y\right) - \mathrm{i}\frac{m^-}{(\epsilon^-)^2}\left(\partial_x H_y - (\partial_y H_x)^-\right), \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} & \mathrm{i}\frac{m^+}{(\epsilon^+)^2}\left((\partial_y H_z)^+ - \partial_z H_y\right) + \frac{1}{\epsilon^+}\left(\partial_x H_y - (\partial_y H_x)^+\right) \\ = \; & \mathrm{i}\frac{m^-}{(\epsilon^-)^2}\left((\partial_y H_z)^- - \partial_z H_y\right) + \frac{1}{\epsilon^-}\left(\partial_x H_y - (\partial_y H_x)^-\right); \end{aligned} \tag{33}$$

in dimensionsloser Formulierung:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\epsilon^+}\left((\partial_q w)^+ - \partial_s v + \mathrm{i}n_r v\right) - \mathrm{i}\frac{m^+}{(\epsilon^+)^2}\left(\partial_p v - (\partial_q u)^+\right) \\ = \; & \frac{1}{\epsilon^-}\left((\partial_q w)^- - \partial_s v + \mathrm{i}n_r v\right) - \mathrm{i}\frac{m^-}{(\epsilon^-)^2}\left(\partial_p v - (\partial_q u)^-\right), \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} & \mathrm{i}\frac{m^+}{(\epsilon^+)^2}\left((\partial_q w)^+ - \partial_s v + \mathrm{i}n_r v\right) + \frac{1}{\epsilon^+}\left(\partial_p v - (\partial_q u)^+\right) \\ = \; & \mathrm{i}\frac{m^-}{(\epsilon^-)^2}\left((\partial_q w)^- - \partial_s v + \mathrm{i}n_r v\right) + \frac{1}{\epsilon^-}\left(\partial_p v - (\partial_q u)^-\right). \end{aligned} \tag{35}$$

Die Grenzflächen beeinflussen lediglich Ableitungen in Normalenrichtung; an horizontalen Grenzflächen können also höchstens die Größen $\partial_x H_y$ und $\partial_x H_z$, an vertikalen die Größen $\partial_y H_x$ und $\partial_y H_z$ unstetig sein. $\partial_x H_x$ bzw. $\partial_y H_y$ sind über die Divergenzgleichung (5) mit tangentialen Ableitungen verknüpft.

2.5 Längsinhomogene Strukturen

Ausbreitungsrechnungen sind insbesondere zur Untersuchung längsinhomogener Strukturen interessant. Mit dem bislang dargelegten Formalismus lassen sich solche Wellenleiter dann behandeln, wenn die Permittivität in Ausbreitungsrichtung nur sehr schwach veränderlich ist und die Annnahmen in (2.2) — jetzt als Näherungen — weiterhin gelten oder die Abweichungen für die Problemstellung unwesentlich sind. Reflektionen an longitudinalen Permittivitätssprüngen oder Verkopplungen der Polarisationsrichtungen aufgrund solcher Längsinhomogenitäten gehen in die Rechnungen nicht ein. Diese Vorbehalte gelten insbesondere für die Ergebnisse des Abschnitts (4.6).

Nach [9] scheint die folgende einfache Vorgehensweise auszureichen: Ein längsinhomogener Wellenleiter wird entlang der Ausbreitungsrichtung in Abschnitte geeigneter Länge derart eingeteilt, daß ein über die entsprechende Distanz konstantes Permittivitätsprofil dem tatsächlichen genügend gleicht. Die entwickelte Ausbreitungsmethodik erlaubt, ein Anfangsfeld über einen solchen, jetzt längshomogenen Abschnitt weiterzurechnen. An den Abschnittsgrenzen wird das berechnete Feld dann in ein Anfangsfeld für den neuen Abschnitt umgesetzt.

Im allgemeinen legt die gewählte Diskretisierung (siehe (3.1)) auch die obige Einteilung fest: Eine Abschnittsgrenze ist dann notwendig, wenn nach dem modellierten Permittivitätsprofil einem oder mehreren Diskretisierungspunkten geänderte Permittivitätswerte zuzuordnen sind. Als einfachste Lösung für die Umsetzung in ein neues Anfangsfeld bietet sich an, die Feldwerte an den Diskretisierungspunkten identisch zu übernehmen, dieses Vorgehen ist jedoch gelegentlich nicht ausreichend. Ausgehend von Beobachtungen bei Ausbreitungsrechnungen in schrägen Wellenleitern führen in (4.5) erst zusätzliche Feldänderungen — die Anpassung der Stetigkeitsbedingungen an den transversalen Permittivitätssprüngen und Normierung des Feldes auf die Leistung vor der Umsetzung — zu plausibleren Ergebnissen.

2.6 Planare Wellenleiter

Beschränkt man sich auf Strukturen, die bezüglich y translationsinvariant sind, also lediglich horizontale Grenzflächen aufweisen, und auf Lösungen, die in y–Richtung konstant sind, dann entkoppeln die Gleichungen zur H_y–Magnetfeldkomponente (sog. transversal magnetische, TM–Polarisation) von denen der H_x– und H_z–Komponenten (transversal elektrische, TE–Polarisation); letztere können mit Hilfe der E_y–Komponente der elektrischen Feldstärke ebenfalls skalar beschrieben werden [4]. Die Ausbreitungsgleichung (17) vereinfacht sich zu:

$$\partial_z H_j = -\mathrm{i}k_0 \left(\frac{\epsilon_r + \epsilon}{2n_r} \right) H_j - \frac{\mathrm{i}}{2k_0 n_r} \partial^2_{x^2} H_j, \quad j = x, y, z, \tag{36}$$

und von den Grenzflächengleichungen (30), (31) bleibt übrig:

$$\frac{1}{\epsilon^+}(\partial_x H_y)^+ - \mathrm{i}\frac{m^+}{(\epsilon^+)^2}\partial_z H_y = \frac{1}{\epsilon^-}(\partial_x H_y)^- - \mathrm{i}\frac{m^-}{(\epsilon^-)^2}\partial_z H_y, \tag{37}$$

$$\frac{1}{\epsilon^+}\left(\partial_z H_x - (\partial_x H_z)^+\right) = \frac{1}{\epsilon^-}\left(\partial_z H_x - (\partial_x H_z)^-\right). \tag{38}$$

Die Magnetisierung beeinflußt demnach in erster Ordnung lediglich die Lichtausbreitung zur TM-Polarisation, die weiteren planaren Untersuchungen in dieser Arbeit beschränken sich entsprechend darauf. Gleichungen (36) und (37) erhalten nach den Skalierungen (2.3) die Form

$$\partial_s v = \mathrm{i}\left(\frac{\epsilon_r - \epsilon}{2n_r} \right) v - \frac{\mathrm{i}}{2n_r}\partial^2_{p^2} v \tag{39}$$

und

$$\frac{1}{\epsilon^+}(\partial_p v)^+ - \mathrm{i}\frac{m^+}{(\epsilon^+)^2}(\partial_s v - \mathrm{i}n_r v) = \frac{1}{\epsilon^-}(\partial_p v)^- - \mathrm{i}\frac{m^-}{(\epsilon^-)^2}(\partial_s v - \mathrm{i}n_r v). \tag{40}$$

2.7 Feldinitialisierung

Die Ausbreitungsrechnungen starten mit einem auf dem Anfangsquerschnitt vorgegebenen Feld. In den hier duchgeführten allgemeinen Untersuchungen bietet sich ein im Inneren des Rechenfensters lokalisiertes Anfangsfeld an, dessen Ausbreitung wenigstens in homogenen, isotropen Medien wie Luft genähert analytisch nachvollziehbar ist und das dort so etwas wie einen Lichtstrahl mit definierter Polarisation modelliert. Davon abweichend sind je nach behandelter Problemstellung andere Feldformen sinnvoll, beispielsweise ein konstantes Feld als Simulation eines großflächigen Laserstrahls [7], anderweitig berechnete Modenprofile [15], auch zu anderen Wellenleitern, oder Felder mit bestimmten Symmetrieeigenschaften.

Im allgemeinen genügen diese Anfangsfelder nicht den Stetigkeitsbedingungen aus (2.4), was insbesondere bei starken Permittivitätssprüngen eine Fehlerquelle der Rechnungen sein kann.

Die in dieser Arbeit meistens verwendeten *Gauß'schen Strahlen* setzen sich aus ebenen Wellen zusammen, die gemäß einer Gauß'schen Glockenkurve nach Wellenvektoren gewichtet sind. Diese Wellen sollen sich in einem Medium mit Brechungsindex n_g ausbreiten und die in den Ausbreitungsrechnungen simulierte Frequenz ω besitzen. Wählt man die transversalen x–, y–Komponenten der wesentlich beteiligten Wellenvektoren ausreichend klein gegen die longitudinale z–Komponente, dann läßt sich der von der Überlagerung gebildete Strahl durch den maximal beitragenden Wellenvektor $\boldsymbol{k}_g$ und eine dazu senkrechte Polarisationsrichtung $\boldsymbol{p}_g$ charakterisieren. Letzere ist auch nahezu orthogonal zu den übrigen stark gewichteten Wellenvektoren. Für ein solches Feld ergibt sich zunächst der Ansatz:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_g(x,y,z) \quad &= \quad \boldsymbol{p}_g H_{g,0} \iint \frac{4}{\Delta k_g^2 \pi}\, \mathbf{e}^{-4((\kappa_x - k_{g,x})^2 + (\kappa_y - k_{g,y})^2)/\Delta k_g^2} \\ &\qquad \cdot\, \mathbf{e}^{-\mathrm{i}(\kappa_x x + \kappa_y y + \kappa_z(\kappa_x,\kappa_y) z)}\, d\kappa_x\, d\kappa_y\end{aligned}$$

mit $\kappa_z(\kappa_x,\kappa_y) = \sqrt{k_0^2 n_g^2 - \kappa_x^2 - \kappa_y^2}, \quad \boldsymbol{p}_g \perp \boldsymbol{k}_g = \begin{pmatrix} k_{g,x} \\ k_{g,y} \\ k_{g,z} \end{pmatrix}$ und $k_{g,z} = \sqrt{k_0^2 n_g^2 - k_{g,x}^2 - k_{g,y}^2}$.

Unter der Vorraussetzung einer hinreichend schmalen Überlagerung $\Delta k_g \ll k_0 n_g$ lassen sich die Integrale mit Hilfe der Näherung

$$\kappa_z(\kappa_x,\kappa_y) \approx k_{g,z} + (k_{g,x} - \kappa_x)\frac{k_{g,x}}{k_{g,z}} + (k_{g,y} - \kappa_y)\frac{k_{g,y}}{k_{g,z}}$$

auflösen:

$$\boldsymbol{H}_g(x,y,z) \approx \boldsymbol{p}_g H_{g,0}\, \mathbf{e}^{-\frac{\Delta k_g^2}{16}\left((x - \frac{k_{g,x}}{k_{g,z}}z)^2 + (y - \frac{k_{g,y}}{k_{g,z}}z)^2\right)}\, \mathbf{e}^{-\mathrm{i}(k_{g,x}x + k_{g,y}y + k_{g,z}z)}.$$

Demnach ist $\boldsymbol{H}_g$ eine ebene Welle mit Ausbreitungsvektor $\boldsymbol{k}_g$ und in der Ebene z am Punkt $(k_{g,x}/k_{g,z}, k_{g,y}/k_{g,z})z$ lokalisiert. Die gewählte spektrale Breite Δk_g legt typische Radien des Strahles fest: $r_g = 4/\Delta k_g$. Je kleiner dieser Radius ist, desto weniger sind obige Voraussetzungen zur Integration erfüllt und desto mehr wird sich ein in der Form (41) vorgegebenes Feld bei der Ausbreitung auflösen, der Strahl zum Zerfließen neigen.

$\boldsymbol{k}_g$ und $\boldsymbol{p}_g$ lassen sich nach

$$\boldsymbol{k}_g = k_0 n_g \begin{pmatrix} \sin\alpha_v \\ \cos\alpha_v \sin\alpha_h \\ \cos\alpha_v \cos\alpha_h \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_g = \begin{pmatrix} \sin\alpha_p \cos\alpha_v \\ \cos\alpha_h \cos\alpha_p - \sin\alpha_h \sin\alpha_p \sin\alpha_v \\ -\sin\alpha_h \cos\alpha_p - \cos\alpha_h \sin\alpha_p \sin\alpha_v \end{pmatrix}$$

durch drei Richtungswinkel bestimmen: α_h gibt den Winkel zwischen z–Achse und Projektion von $\boldsymbol{k}_g$ auf die y–z–Ebene, α_v den Winkel zwischen $\boldsymbol{k}_g$ und dieser Ebene an. α_p beschreibt die Drehung des zu $\boldsymbol{k}_g$ senkrechten Polarisationsvektors aus der y–z–Ebene um $\boldsymbol{k}_g$.

Zur Implementation muß $\boldsymbol{H}_g$ ebenfalls als Modulation umgeschrieben und skaliert werden. Wählt man den Ausgangsquerschnitt in $k_0 z = 0$ und darauf das Feldstärkemaximum in $(k_0 x_s, k_0 y_s)$, dann bleibt als Anfangsfeld:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_g (p,q,0) \;=\; \boldsymbol{p}_g\, \mathbf{e}^{-\frac{1}{r_g^2}\left((p/k_0 - x_s)^2 + (q/k_0 - y_s)^2\right)} \cdot \mathbf{e}^{-\mathrm{i}(k_{g,x}(p/k_0 - x_s) + k_{g,y}(q/k_0 - y_s))}. \tag{41}$$

Als Anfangsfelder von Ausbreitungsrechnungen in Strukturen mit größeren Permittivitätssprüngen erfüllen die Gauß'schen Strahlen meistens nicht die an den Sprungstellen geforderten Stetigkeitsbedingungen. Man kann von dem daraus weitergerechneten Feld — abgesehen von weiteren Vereinfachungen — nur näherungsweise ein physikalisch plausibles Verhalten erwarten. Ob darin tatsächlich eine Ursache der insbesondere im dreidimensionalen Fall auftretenden Schwingungen in den Leistungskurven (5.2) liegt, konnte in dieser Arbeit nicht aufgeklärt werden.

In der nichtmagnetooptischen Situation treten in den Gleichungen (28) und (33) ausschließlich transversale Ableitungen auf. Eine an den betreffenden Stellen konstante Initialisierung erfüllt beide Bedingungen. Wegen der Randbedingungsproblematik sollte das Anfangsfeld an den Rechenfensterrändern möglichst klein sein. Demnach liegt es nahe, die Ausbreitungsrechnungen mit einer geeigneten Hutfunktion zu starten, die an den Rändern verschwindet, den führenden Strukturbereich erhöhter Permittivität samt seinen Grenzen mit in einer transversalen Polarisationsrichtung konstantem Feld überdeckt und dazwischen stetig und differenzierbar ansteigt. Nach [21] läßt sich eine solche Funktion f z.B. folgendermaßen formalisieren:

$$f(x,y) = f_\uparrow(x_{b_0}, x_{b_1}; x) \cdot f_\downarrow(x_{t_1}, x_{t_0}; x) \cdot f_\uparrow(y_{b_0}, y_{b_1}; y) \cdot f_\downarrow(y_{t_1}, y_{t_0}; y) \tag{42}$$

mit

$$f_\uparrow(x_0, x_1; x) = \frac{f_0(x - x_0)}{f_0(x - x_0) + f_0(x_1 - x)}, \qquad f_\downarrow(x_1, x_0; x) = \frac{f_0(x_0 - x)}{f_0(x_0 - x) + f_0(x - x_1)},$$

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \le 0 \\ \mathbf{e}^{-1/x} & \text{für} \quad x > 0 \end{cases} ; \quad x_{b_0} < x_{b_1} < x_{t_1} < x_{t_0}, \quad y_{b_0} < y_{b_1} < y_{t_1} < y_{t_0}.$$

$f(x,y)$ ist 0 für $(x,y) \notin [x_{b_0}, x_{t_0}] \times [y_{b_0}, y_{t_0}]$ und 1 für $(x,y) \in [x_{b_1}, x_{t_1}] \times [y_{b_1}, y_{t_1}]$, außerdem ist f beliebig differenzierbar.

Zur Initialisierung einer transversalen Feldkomponente mit f wählt man den durch die Parameter x_{b_0} bis y_{t_0} gegebenen Rahmen innerhalb des Rechenfensters so, daß f auf den Permittivitätsgrenzen möglichst überall konstant ist. Das ergibt vermutlich zwar kein sinnvoll interpretierbares Anfangsfeld, das Verhalten der Leistungskurven ist in den beobachteten Fällen aber damit plausibler.

2.8 Feldanalysen

Als Ergebnis einer Ausbreitungsrechnung erhält man zunächst in jedem Diskretisierungspunkt des betrachteten Querschnitts nach jedem Ausbreitungsschritt drei komplexe Werte, die die magnetische Feldstärke dort beschreiben. Abhängig von der behandelten Problemstellung sind diese Daten noch vor der weiteren Berechnung auszuwerten.

2.8.1 Feldstärke, –Energie

Etwa bei der Untersuchung von Modenprofilen (2.8.2) wird die örtlich veränderliche magnetische Feldstärke interessieren. Zur — nach Umskalierung — berechneten Modulation $\boldsymbol{F}$ gehört mit den Bezeichnungen aus (2.1) ein Feld

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{r},t) \sim \mathrm{Re}\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cos(\omega t - k_0 n_r z) - \mathrm{Im}\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\sin(\omega t - k_0 n_r z),$$

mit dem zeitlich gemittelten Quadrat $\overline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^2$:

$$\overline{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^2(\boldsymbol{r}) \sim \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{r}) \sim \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r}).$$

Demnach läßt sich die physikalische Lichtführung beispielsweise durch Auftragung des Betrages oder Betragsquadrates der Modulation illustrieren.

In einem linearen, isotropen und nichtmagnetischen dielektrischen Medium mit Permittivität ϵ ist die zeitgemittelte Energiedichte σ des elektromagnetischen Feldes bei einer harmonischen Zeitabhängigkeit $\sim \mathbf{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ aller Felder gegeben durch:

$$\sigma = \frac{1}{4}\left(\epsilon_0\epsilon|\boldsymbol{E}|^2 + \mu_0|\boldsymbol{H}|^2\right),$$

dazu gehört die Energiestromdichte

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*).$$

Deren Komponente in Ausbreitungsrichtung S_z ergibt, integriert über einen Querschnittsbereich, den Strahlungsfluß im Wellenleiter und als Funktion der Ausbreitungsstrecke ein Maß der in der Struktur geführten Leistung.

Obige Formeln sollten wegen der nur sehr kleinen Außerdiagonalelemente der Permittivitätstensoren (10) auch für die behandelten magnetooptischen Schichten als gute Näherungen gelten. Zur Implementierung sind die elektrischen durch Ableitungen der magnetischen Feldkomponenten zu ersetzen, die Formeln auf die Modulation umzuschreiben und wie in (2.3) zu skalieren. Übrig bleibt:

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{r}) \sim \Big(&|u|^2 + |v|^2 + |w|^2 \\ &+ \frac{1}{\epsilon}\left(|\partial_q w - \partial_s v + \mathrm{i}n_r v|^2 + |\partial_p w - \partial_s u + \mathrm{i}n_r u|^2 + |\partial_p v - \partial_q u|^2\right)\Big)(k_0\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{43}$$

und

$$S_z(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\epsilon}\mathrm{Im}\,\left((\partial_p w - \partial_s u + \mathrm{i}n_r u)u^* + (\partial_q w - \partial_s v + \mathrm{i}n_r v)v^*\right)(k_0\boldsymbol{r}). \tag{44}$$

S_z zerfällt in zwei Summanden, die den Leistungsanteil je einer transversalen Feldkomponente enthalten: $S_z = S_z^x + S_z^y$ mit

$$S_z^x(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\epsilon}\mathrm{Im}\,\left((\partial_p w - \partial_s u + \mathrm{i}n_r u)u^*\right)(k_0\boldsymbol{r}) \tag{45}$$

und

$$S_z^y(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\epsilon}\mathrm{Im}\,\left((\partial_q w - \partial_s v + \mathrm{i} n_r v)v^*\right)(k_0\boldsymbol{r}). \tag{46}$$

(45) und (46) dienen meistens in integrierter Form zur Charakterisierung der Polarisation der im allgemeinen hybriden Felder in den untersuchten Wellenleiterstrukturen.

Unter der Annahme, daß $\boldsymbol{H}$ im wesentlichen eine sich in z–Richtung ausbreitende ebene Welle beschreibt, können bei den Simulationen im freien Raum mit konstanter Permittivität $\epsilon = 1.0$ die transversalen und longitudinalen Ableitungen der Modulationskomponenten in (43) und (44) entfallen. Dann gelten die einfachen Proportionalitäten:

$$\sigma(\boldsymbol{r}) \sim \left(|u|^2 + |v|^2\right)(k_0\boldsymbol{r}) \qquad \text{und} \qquad S_z(\boldsymbol{r}) \sim \left(|u|^2 + |v|^2\right)(k_0\boldsymbol{r}). \tag{47}$$

2.8.2 Moden

Ein neueres BPM–Verfahren, die sog. Methode der Geraden [9], beruht auf der folgenden Beobachtung: Nach transversaler Diskretisierung unter Verwendung der Grenzflächengleichungen erhält die Ausbreitungsgleichung die Form $A\partial_s\boldsymbol{h} = B\boldsymbol{h}$ mit geeigneten Matrizen A, B (Gleichung (82), Bezeichnungen und Weg dorthin siehe (3.1)). Sie hat die Lösung $\boldsymbol{h}(s) = \sum c_j \boldsymbol{g}_j\,\mathrm{e}^{\lambda_j s}$, wenn die Vektoren $\boldsymbol{g}_j$ das verallgemeinerte Eigenwertproblem $B\boldsymbol{g} = \lambda A\boldsymbol{g}$ zu Eigenwerten λ_j lösen und sich das Anfangsfeld $\boldsymbol{h}(0)$ aus diesen Eigenvektoren mit Koeffizienten c_j linear kombinieren läßt. Die Ausbreitungsgleichung und insbesondere der implementierte Randbedingungsalgorithmus muß sicherstellen, daß das Feld nicht explodiert: $\mathrm{Re}\,\lambda_j \le 0$. Nach hinreichend langer Ausbreitung tragen nur noch solche Eigenvektoren bei, deren Eigenwerte einen gerade verschwindenden Realteil besitzen. Dieses Fernfeld, das nach einer längeren Ausbreitungsstrecke berechnete Feld, kann man als $\boldsymbol{h}(s) = \sum c_j' \boldsymbol{g}_j\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b_j s}$ mit reellen Konstanten b_j ansetzen.

Nach Überlegungen in derselben Richtung werden die kontinuierlichen Gleichungen (12) bzw. (17) und (28), (29), (32), (33) im längshomogenen Wellenleiter Lösungen in *Moden*form

$$\boldsymbol{H}(x,y,z) = \sum c_j \boldsymbol{\chi}_j(x,y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_j z} \tag{48}$$

zulassen. Die nur von den transversalen Koordinaten abhängigen Modenfunktionen $\boldsymbol{\chi}_j$ bezeichnen normierbare Eigenfunktionen der zu A und B analogen Operatoren, deren zugehörige Eigenwerte mit den reellen Ausbreitungskonstanten β_j verknüpft sind. Die komplexen Amplitudenfaktoren c_j entstehen aus Projektionen des Anfangsfeldes auf die Eigenräume der Modenfunktionen bzgl. eines problemangepaßten Skalarproduktes.

Wie schon in (2.8.1) beschränken sich die an [8] orientierten Betrachtungen dieses Abschnittes auf isotrope Strukturen (Permittivität $(n^2, 0)$), sollten für magnetooptische jedoch näherungsweise ebenfalls gültig sein. In einem solchen Wellenleiter erfüllt jede Mode einzeln die Helmholtz–Gleichung

$$\partial_{z^2}^2\boldsymbol{H} = -k_0^2 n^2\boldsymbol{H} - (\partial_{x^2}^2 + \partial_{y^2}^2)\boldsymbol{H}. \tag{49}$$

Den Ausbreitungsrechnungen liegt jedoch die Fresnel–Gleichung

$$-2\mathrm{i}k_0 n_r\partial_z\boldsymbol{F} = k_0^2(n_r^2 - n^2)\boldsymbol{F} - (\partial_{x^2}^2 + \partial_{y^2}^2)\boldsymbol{F} \tag{50}$$

zugrunde. Es bleibt zu überprüfen, ob die daraus gewonnenen Modenfunktionen $\boldsymbol{\chi}'$ und Ausbreitungskonstanten β' mit denen der Helmholtz–Gleichung $\boldsymbol{\chi}$, β übereinstimmen. Dazu erhält man aus (49) mit (18) zunächst die Gleichung

$$\partial_{z^2}^2\boldsymbol{F} - 2\mathrm{i}k_0 n_r\partial_z\boldsymbol{F} = k_0^2(n_r^2 - n^2)\boldsymbol{F} - (\partial_{x^2}^2 + \partial_{y^2}^2)\boldsymbol{F}. \tag{51}$$

Zum Feld der Mode $\chi(x,y)\,\mathbf{e}^{-\mathrm{i}\beta z}$ gehört die Modulation $\chi(x,y)\,\mathbf{e}^{\mathrm{i}(k_0 n_r - \beta)z}$. Setzt man diese Form in (50) und (51) ein, dann ergeben sich die folgenden Beziehungen für die Modenprofile und Ausbreitungskonstanten der Helmholtz– und Fresnel–Gleichung:

$$\beta^2\chi = k_0^2 n^2 \chi + (\partial^2_{x^2} + \partial^2_{y^2})\chi, \tag{52}$$

$$(-k_0^2 n_r^2 + 2k_0 n_r \beta')\chi' = k_0^2 n^2 \chi' + (\partial^2_{x^2} + \partial^2_{y^2})\chi'. \tag{53}$$

(52) und (53) sind gültig in jedem Punkt innerhalb eines Querschnittsegmentes mit konstantem Brechungsindex n, sie sind noch um Kontakt– und Randbedingungen zu ergänzen. Die beiden Gleichungen können als Operator–Eigenwertgleichungen gelesen werden: Mit denselben Stetigkeitsbedingungen an den Segmentgrenzen sind die daraus ermittelten Eigenfunktionen nach Normierung identisch und die zugehörigen Eigenwerte durch

$$\beta = \sqrt{2k_0 n_r \beta' - k_0^2 n_r^2} \tag{54}$$

verknüpft. In einem einmodigen Wellenleiter ist demnach $n_r = \beta/k_0$ die optimale Wahl des Referenzbrechungsindex. Außerdem verschwindet dann die Abhängigkeit des Modulationsfeldes von z, mögliche Fehler aufgrund der longitudinalen Diskretisierungen werden minimal.

Setzt man nun eine Ausbreitungsrechnung genügend lange fort, bleiben schließlich nur noch geführte Moden des Wellenleiters übrig, das in den folgenden Schritten berechnete Feld besitzt die Gestalt (48), in diskretisierter Form auf einem endlichen Rechenfenster. Unter der Annahme, daß die Modenfunktionen χ_j als Eigenfunktionen der erweiterten Ausbreitungsoperatoren, der rechten Seiten von (52) und (53), im Sinne von

$$\iint \chi_a^*(x,y)\cdot\chi_b(x,y)\;dx\,dy \approx \delta_{a,b} \tag{55}$$

wenigstens genähert (vgl. (59)) paarweise orthogonal und normiert wählbar sind, dann können durch Fouriertransformation der Funktion

$$K(z) := \iint \boldsymbol{H}^*(x,y,0)\cdot\boldsymbol{H}(x,y,z)\;dx\,dy = \sum_j |c_j|^2\,\mathbf{e}^{-\mathrm{i}\beta'_j z} \tag{56}$$

die Ausbreitungskonstanten β'_j ermittelt werden [8]. In obiger Gleichung soll der z–Nullpunkt an die Stelle gesetzt sein, ab der eine Feldform wie (48) angenähert erreicht ist.

Aus den dimensionslosen Feldkomponenten berechnet man die Korrelationsfunktion

$$L(s) := \iint \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{pmatrix}(p,q,0)\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}(p,q,s)\;dp\,dq = \sum_j |c_j|^2\,\mathbf{e}^{-\mathrm{i}(\beta'_j/k_0 - n_r)s}. \tag{57}$$

Die (diskrete) Fouriertransformierte zu L sollte an den Stellen $\eta_j = \beta'_j/k_0 - n_r$ im Betrag scharfe Spitzen aufweisen und die gesuchten Ausbreitungskonstanten nach der Gleichung

$$\beta_j = k_0\sqrt{n_r(n_r + 2\eta_j)} \tag{58}$$

bestimmen lassen.

Im planaren Fall verkoppeln die das Modenprofil bestimmenden Gleichungen (36) und (37) Real– und Imaginärteil der Funktionen χ_y nicht, beide Anteile werden durch dieselben Gleichungen nur bis auf konstante Vorfaktoren festgelegt. Die χ_y können deshalb stets als reelle Funktionen gewählt werden. Das Feld auf dem Endquerschnitt $z = z_e$ der Ausbreitungsrechnung setzt sich aus diesen Funktionen mit komplexen Koeffizienten zusammen. Daraus lassen sich die Modenprofile zu

$$\chi_y(x,y) \sim \mathrm{Re}\, v(k_0x, k_0y, k_0z_e) \qquad \text{oder} \qquad \chi_y(x,y) \sim \mathrm{Im}\, v(k_0x, k_0y, k_0z_e)$$

ermitteln, wenn der Wellenleiter lediglich eine einzige Mode führen kann bzw. nur die Anregung einer einzelnen Mode simuliert wurde.

Setzt man den Modenansatz (48) in die vektoriellen Gleichungen (17), (28), (29), (32), (33) ein, dann reduzieren sich diese auf ein rein reelles Differentialgleichungssystem, einerseits in den Unbekannten Re χ_x, Re χ_y, Im χ_z, andererseits für die Funktionen Im χ_x, Im χ_y, $-$Re χ_z. Die Modenfunktionen müssen deshalb die Gestalt $\boldsymbol{\chi} = c(\chi'_x, \chi'_y, \mathrm{i}\chi'_z)$ mit reellwertigen Funktionen χ'_x, χ'_y, χ'_z besitzen; die longitudinale Feldkomponente hat zu den transversalen einen Phasenunterschied $\pi/2$. Die Endfelder, die Felder auf dem Endquerschnitt $z = z_e$, zu geeigneten einmodigen Ausbreitungsrechnungen erlauben demnach über

$$\boldsymbol{\chi}(x,y) \sim \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, u \\ \mathrm{Re}\, v \\ \mathrm{iIm}\, w \end{pmatrix} (k_0x, k_0y, k_0z_e)$$

auch die Bestimmung vektorieller Modenfunktionen.

Die TM–Moden in einer planaren, nichtmagnetischen Schichtstruktur (wie in (2.9),(2.10) für $m = 0$) erfüllen auf jedem Querschnittsegment die Eigenwertgleichung (52). Auf einem Raum aus normierbaren, komplexwertigen und bis auf die Permittivitätssprünge glatten Funktionen ϕ, die an den Segmentgrenzen die Stetigkeitsbedingungen der TM–Moden respektieren, ist der Operator $\partial^2_{x^2} + k_0^2\epsilon(x)$ selbstadjungiert, wenn man das Skalarprodukt

$$(\phi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\epsilon(x)} \phi^*(x)\psi(x)\, dx \tag{59}$$

verwendet. Die Modenfunktionen χ_j sind als zugehörige Eigenfunktionen bzgl. dieses Skalarproduktes orthogonal und normiert wählbar. Unter der Annahme, daß sich die Überlegungen zu Beginn dieses Abschnittes auf die kontinuierliche Situation übertragen, läßt sich das Anfangsfeld H_0 einer Ausbreitungsrechnung in einer solchen Struktur schreiben als

$$H_0 = H_a + \sum_j c_j \chi_j \quad \text{mit} \quad (H_a, \chi_j) = 0 \quad \forall j.$$

Die Feldanteile H_a verschwinden bei der Ausbreitung; aus dem übriggebliebenen Feld

$$H_e(x) = \sum_j c_j \chi_j(x)\, \mathbf{e}^{-\mathrm{i}\beta_j z_e}$$

auf dem Endquerschnitt z_e lassen sich die Betragsquadrate der Amplitudenfaktoren c_j ermitteln:

$$(H_e, H_e) = \sum_{l,j} c_l^* c_j\, \mathbf{e}^{\mathrm{i}(\beta_l - \beta_j)z_e} (\chi_l, \chi_j) = \sum_l |c_l|^2.$$

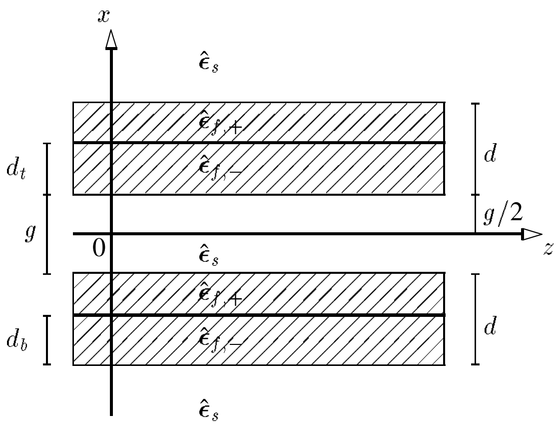
In einem einmodigen Wellenleiter bzw. bei Anregung nur einer Mode muß der so erhaltene Wert $|c|$ mit der Projektion des Anfangsfeldes auf die bereits bekannte oder dem Endfeld entnommene Modenfunktion übereinstimmen:

$$|(H_0, \chi)| = |c|.$$

Dieser Vergleich bietet eine weitere Möglichkeit zum Test der planaren Ausbreitungsalgorithmen.

2.9 Wellenleiterkopplung

Zur Illustration der Funktionsweise eines einfachen und als Isolator verwendbaren Wellenleiterkopplers dient die in (4.4) untersuchte, planare und längshomogene Struktur:



Sie besteht aus zwei parallelen, jeweils zweischichtigen magnetooptischen Wellenleitern, in denen je eine Grenze zwischen Bereichen mit unterschiedlicher Magnetisierung verläuft. Die Analyse beschränkt sich auf die TM–Polarisation, alle in diesem Abschnitt genannten Felder meinen die H_y Komponente. Dann sollen die Spaltbreite g, die Breite der Wellenleiter d und die Lagen der Grenzen d_b, d_t sowie die Permittivitäten $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{f,\pm} = (\epsilon_f, \pm m_f)$ in den Wellenleitern und $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_s = (\epsilon_s, 0)$ außerhalb so gewählt sein, daß die Struktur eine zur Ebene $x = 0$ symmetrische (Index s) und eine dazu antisymmetrische (Index a) Mode führen kann.

χ_s, χ_a und β_s, β_a bezeichnen die reell gewählten und normierten Modenfunktionen sowie die Ausbreitungskonstanten. Ein in dieser Struktur über längere Strecken unverändert ausbreitungsfähiges Feld hat dann die Gestalt:

$$H(x, z) = \mathbf{e}^{-\mathrm{i}\beta_a z} \left(c_a \chi_a(x) + c_s \chi_s(x)\, \mathbf{e}^{-\mathrm{i}(\beta_s - \beta_a) z} \right).$$

Die Faktoren c_s und c_a sind dabei im Sinne von (59) den Projektionen des Anfangsfeldes H_0 einer Ausbreitungsrechnung auf die Modenfunktionen proportional. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Moden lassen sich deshalb die symmetrische bzw. antisymmetrische Mode durch ein Anfangsfeld gleicher Symmetrie auch einzeln anregen.

Interessanter ist jedoch die Überlagerung beider Moden. Wenn χ_s und χ_a betragsmäßig ungefähr die gleiche Form besitzen, dann erzeugt eine nur einseitige Anregung, z.B. ein ausreichend schmaler Gauß'scher Strahl parallel zur z–Achse im oberen Wellenleiter, nach Abstrahlung gewisser Anteile ein Interferenzmuster, zu dem beide Moden mit nahezu gleichen Gewichten beitragen. Das Betragsquadrat der Feldstärke

$$|H|^2(x, z) = |c_a|^2 \chi_a^2(x) + |c_s|^2 \chi_s^2(x) + 2|c_s||c_a| \chi_s \chi_a \cos((\beta_s - \beta_a)z + \phi_0),$$

(ϕ_0: aus c_a und c_s bestimmte Anfangsphase) ändert sich in Ausbreitungsrichtung mit der Schwebungsfrequenz $|\beta_s - \beta_a|$. Das Produkt $\chi_s \chi_a$ hat auf beiden Seiten der Symmetrieebene unterschiedliche Vorzeichen, so daß die Betragsmaxima in beiden Wellenleitern in gleichen Abständen $2L$, aber um die Strecke

$$L = \frac{\pi}{|\beta_s - \beta_a|}$$

versetzt auftreten. Diesen Vorgang mag man als *Kopplung*, L als die zugehörige Koppellänge bezeichnen. Je nach Übereinstimmung der Modenprofile und Gewichte wechselt die Intensität mehr oder weniger vollständig zwischen den Wellenleitern.

Ausbreitungsrechnungen zu dieser Struktur liefern wiederum leicht abweichende Ausbreitungskonstanten β'_a, β'_s und eine Koppellänge $L' = \pi/|\beta'_s - \beta'_a|$. Nach (54) gilt

$$L = \frac{\beta_a + \beta_s}{2k_0 n_r} L',$$

so daß mit $n_r = (\beta_a + \beta_s)/(2k_0)$ ein der Helmholtzgleichung angepaßtes Koppelverhalten simuliert werden kann.

In Verbindung mit einer geeigneten Zusammenführung zweier unabhängiger Wellenleiter vor sowie einer Trennung hinter dem Koppelabschnitt definierter Länge sind die in den oberen bzw. unteren Teil gelangenden Leistungen von den Ausbreitungskonstanten innerhalb des Mittelteiles abhängig und über die Permittivitäten der Wellenleiter z.B. durch verschiedenste äußere Parameter zu beeinflussen. Diese Struktur könnte also — neben vielen anderen Konzepten – als Modulator oder Schalter dienen.

Kleine Außerdiagonalelemente der Permittivität ändern nach den Erfahrungen aus (2.10) die Form einer planaren Mode kaum, so daß auch in der oben skizzierten Anordnung mit $m_f \neq 0$ trotz der dann vermutlich leicht verletzten Symmetrie der Moden ähnliche Interferenzmuster auftreten. Wie in den Einzelwellenleitern werden sich auch in der Gesamtstruktur für Vorwärts– und Rückwärtsausbreitung (Indizes $+$, $-$) verschiedene Ausbreitungskonstanten $\beta_{a,+}$, $\beta_{s,+}$, $\beta_{a,-}$, $\beta_{s,-}$ bzw. Koppellängen L_+, L_- ergeben. Wählt man nun die Gesamtlänge L_D des Kopplers gerade als $L_D = lL_+ = (l \pm 1)L_-$ mit einer geeigneten ganzen Zahl l, d.h als

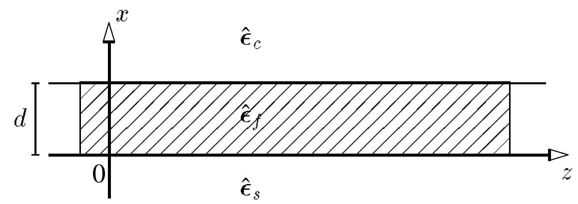
$$L_D = \frac{\pi}{||\beta_{a,+} - \beta_{s,+}| - |\beta_{a,-} - \beta_{s,-}||}$$

dann kann diese wieder um Zusammenführung und Trennung ergänzte Struktur als sog. *Isolator* dienen: Eine Anregung im unteren Wellenleiter am Anfang der Strecke L_D wird diese in Vorwärtsrichtung ausgebreitet ziemlich vollständig auch im unteren Wellenleiter verlassen. Eine Anregung am Ende dieser Strecke im unteren Wellenleiter — modelliert durch ein geändertes Vorzeichen von m_f bei Anregung oben — tritt dagegen im oberen Wellenleiter wieder aus. Genau dieses Verhalten zeigen die Simulationen in (4.6).

Die Überlegungen dieses Abschnitts lassen sich auf die in der Einleitung vorgestellte Struktur übertragen. Der dann aus zwei parallelen Rippenwellenleitern bestehende Koppelabschnitt wurde in (5.5) untersucht.

2.10 TM - Moden eines magnetooptischen Schichtwellenleiters

Als exakt analytisch berechenbares Beispiel zum Test wenigstens der zweidimensionalen Ausbreitungsmethode bietet sich eine planare Struktur aus drei dielektrischen Schichten an, von denen die beiden äußeren isotrop sind und die mittlere aus einem magnetooptischen Material besteht:



Die Ausbreitungsrichtung z wird in der Schichtebene so gewählt, daß die Permittivitätstensoren $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_c$, $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_f$, $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_s$ in den mit Deckschicht, Film und Substrat bezeichneten Schichten (Indizes c, f und s) die Form $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_c = (\epsilon_c, 0)$, $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_f = (\epsilon_f, m_f)$ und $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_s = (\epsilon_s, 0)$ erhalten, falls die transversale x–Richtung normal zu den Schichtebenen ist. Deckschicht bzw. Substrat sollen in $+x$ bzw. $-x$–Richtung unbeschränkt sein und der Koordinatennullpunkt in der Grenzschicht Film/Substrat liegen. d bezeichne die Filmdicke. Nach (2.8.2) erfüllt die H_y–Komponente innerhalb jeder Schicht die Gleichung

$$\left(\partial^2_{x^2} + \partial^2_{z^2}\right) H_y + k_0^2 \epsilon_j H_y = 0, \quad j = c, f, s.$$

Eine geführte Mode ist dadurch gekennzeichnet, daß das Feld eine harmonische z–Abhängigkeit aufweist und in $\pm x$–Richtung im Unendlichen verschwindet:

$$H_y(x, z) = \chi(x)\, \mathbf{e}^{-\mathrm{i}\beta z}.$$

Die Modengleichung erlaubt in Verbindung mit den Stetigkeitsbedingungen an den Grenzflächen und den Randbedingungen im Unendlichen solche Modenfunktionen $\chi \neq 0$ nur für ganz bestimmte diskrete Ausbreitungskonstanten β. Zunächst liefert der Modenansatz die Differentialgleichungen

$$\partial^2_{x^2}\chi + (k_0^2\epsilon_j - \beta^2)\chi = 0, \quad j = c, f, s$$

für χ, die in den drei Schichten bei Beachtung der Randbedingungen Lösungen der Form

$$\chi(x) = \begin{cases} A\,\mathbf{e}^{-w_c x} & \text{für} \quad x > d \\ B\,\mathbf{e}^{\mathrm{i}w_f x} + C\,\mathbf{e}^{-\mathrm{i}w_f x} & \text{für} \quad 0 < x < d \\ D\,\mathbf{e}^{w_s x} & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} w_c &= \sqrt{\beta^2 - k_0^2\epsilon_c} \\ w_f &= \sqrt{k_0^2\epsilon_f - \beta^2} \\ w_s &= \sqrt{\beta^2 - k_0^2\epsilon_s} \end{aligned}$$

zulassen, falls β zwischen $k_0\sqrt{\epsilon_s}$ und $k_0\sqrt{\epsilon_f}$ liegt, wenn o.B.d.A. $\epsilon_s > \epsilon_c$ gilt. Die Koeffizienten A, B, C, D sind dabei so festzulegen, daß H_y den Stetigkeitsbedingungen an den Grenzflächen zwischen Substrat und Film sowie Film und Dechschicht genügt. Nach (2.4) muß dort H_y bzw. χ selbst und in linearer Näherung in m der Ausdruck $\frac{1}{\epsilon}\partial_x H_y - \mathrm{i}\frac{m}{\epsilon^2}\partial_z H_y$ bzw. $\frac{1}{\epsilon}\partial_x\chi - \frac{m\beta}{\epsilon^2}\chi$ stetig sein. Mit obigem Ansatz bilden diese an den Grenzen $x = 0$ und $x = d$ ausgewerteten Bedingungen ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten A, B, C, D mit einer von β abhängigen Matrix. Als Vorraussetzung für eine nicht triviale Lösung muß die Ausbreitungskonstante die sog. *transversale Resonanzbedingung* des Wellenleiters erfüllen:

$$w_f d = \arctan\left(\frac{\epsilon_f}{w_f}\left(\frac{w_s}{\epsilon_s} + \beta\frac{m_f}{\epsilon_f^2}\right)\right) + \arctan\left(\frac{\epsilon_f}{w_f}\left(\frac{w_c}{\epsilon_c} - \beta\frac{m_f}{\epsilon_f^2}\right)\right) + \mu\pi. \tag{60}$$

Dabei berücksichtigt der ganzzahlige Modenindex $\mu \geq 0$ die verschiedenen Urbilder der tan–Funktionswerte. Eine zu β gehörige Mode hat dann bis auf eine komplexe Konstante H_0 die Form:

$$\chi(x) = H_0 \begin{cases} (\cos(w_f d) + K\sin(w_f d))\,\mathbf{e}^{w_c(d-x)} & \text{für} \quad x > d \\ \cos(w_f x) + K\sin(w_f x) & \text{für} \quad 0 < x < d \\ \mathbf{e}^{w_s x} & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \tag{61}$$

mit $K = \dfrac{w_s\epsilon_f}{w_f\epsilon_s} + \dfrac{m_f\beta}{w_f\epsilon_f}$.

Schon aufgrund des Ansatzes ist der Wertebereich möglicher Ausbreitungskonstanten auf das Intervall mit den Grenzen $k_0\sqrt{\epsilon_s}$ und $k_0\sqrt{\epsilon_f}$ beschränkt. Dazwischen gibt es je nach Schichtdicke d eine Anzahl von diskreten Werten β, die Gleichung (60) genügen. Zur Abschätzung der Zahl der erlaubten Moden gilt: Die Resonanzbedingung läßt nur dann die Mode mit Index μ zu, wenn die Filmdicke den zugehörigen *Cutoff*–Wert d_μ nicht unterschreitet:

$$\begin{aligned} d_\mu &= \frac{1}{k_0\sqrt{\epsilon_f - \epsilon_s}} \left(\text{arctan} \left(-\frac{|m_f|}{\epsilon_f} \sqrt{\frac{\epsilon_s}{\epsilon_f - \epsilon_s}} \right) \right. \\ &+ \left. \text{arctan} \left(\frac{\epsilon_f}{\epsilon_c} \sqrt{\frac{\epsilon_s - \epsilon_c}{\epsilon_f - \epsilon_s}} - \frac{|m_f|}{\epsilon_f} \sqrt{\frac{\epsilon_s}{\epsilon_f - \epsilon_s}} \right) + \mu\pi \right) \end{aligned} \tag{62}$$

Die Beleuchtung eines solchen Wellenleiters aus der entgegengesetzten Richtung läßt sich durch geänderte Vorzeichen der Außerdiagonalelemente im Permittivitätstensor des Film beschreiben. Diese Vorzeichen führen über (37) zu leicht verschiedenen Ausbreitungskonstanten und Modenprofilen.

Ein erster Test der planaren Ausbreitungsrechnungen kann demnach die Bestimmung der Modenfunktionen, Ausbreitungskonstanten und ihrer Änderungen für variable Schichtdicke sein. Die folgenden Parameter stammen aus [3]: $\lambda = 1.3\,\mu$m, $\epsilon_c = 1.0$, $\epsilon_f = 5.3$, $\epsilon_s = 3.8025$, $m_f = \pm 0.005$. Der durch diese Daten beschriebene Wellenleiter besitzt die Cutoff–Dicken $d_0 = 0.242\,\mu$m und $d_1 = 0.733\,\mu$m, ist für Filmstärken dazwischen also in TM–Polarisation einmodig. Die Ausbreitungskonstanten für nichtmagnetisierte Filme mit $m_f = 0$ als Funktion der Filmdicke sind im Diagramm 2 eingetragen. Abb. 3 zeigt die Differenz $\Delta\beta = |\beta_+ - \beta_-|$ der Ausbreitungskonstanten β_+ und β_- bei Vorwärts– ($m_f = 0.005$) und Rückwärtsausbreitung ($m_f = 0.005$), Abb. 1 einige typische bzgl. (59) normierte Modenprofile mit der Dicke d des Films als Parameter. In einem solchen Diagramm lassen sich die Funktionen zu magnetisierten Filmen mit $m_f = \pm 0.005$ nicht von denjenigen eines isotropen Films unterscheiden.

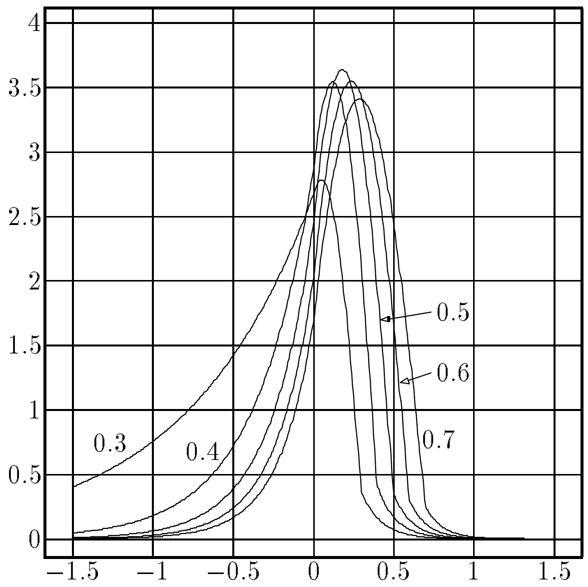


Abb. 1: Normierte Modenfunktionen χ (senkrecht) für einen isotropen Film, aufgetragen gegen den Ort x auf dem Rechenfenster in μm (waagerecht). Parameter ist die Wellenleiterhöhe d in μm.

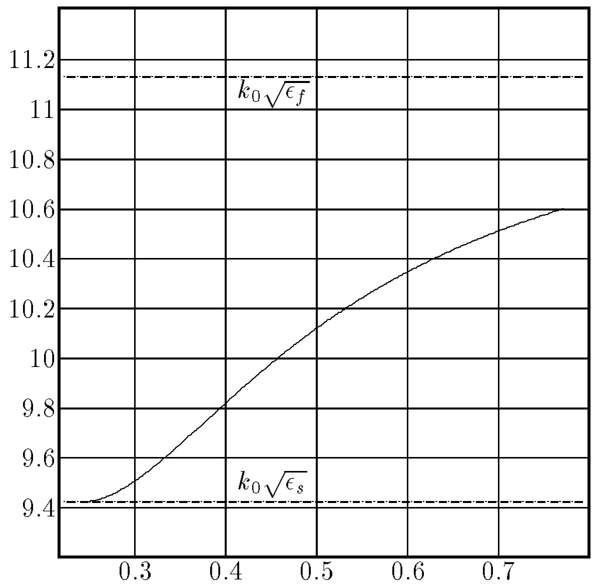


Abb. 2: Senkrecht: Ausbreitungskonstanten β in μm^{-1} für einen isotropen Film; waagerecht: Wellenleiterhöhe d in μm.

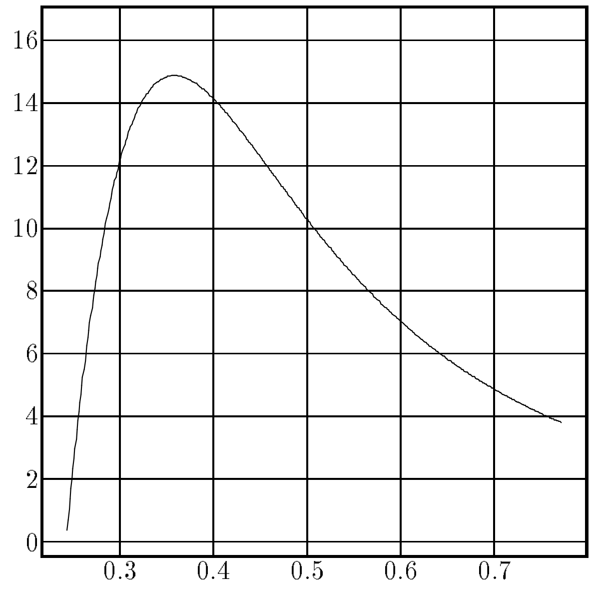


Abb. 3: Senkrecht: Differenz $\Delta\beta$ der Ausbreitungskonstanten bei Vorwärts– und Rückwärtsausbreitung in cm^{-1}; waagerecht: Wellenleiterhöhe d in μm.

3 Die Ausbreitungsmethode: FD-VBPM

FD-VBPM steht wie in [15] für „Finite Difference Vector Beam Propagation Method“ und meint die numerische Lösung der Ausbreitungsgleichungen (23) – (25), nachdem die Differentialoperatoren darin durch geeignete Differenzenquotienten ersetzt sind. Ohne anderslautende Angaben sollen sich die folgenden Betrachtungen auf längshomogene Wellenleiter beziehen.

3.1 Transversale Diskretisierung

Zur numerischen Behandlung stellt man die ursprünglich kontinuierlichen Funktionen u, v, w durch ihre Werte an gewissen ausgezeichneten Raumpunkten dar, zunächst auf einem festen Querschnitt s. Dazu wird ein rechteckiger Ausschnitt dieser Ebene, das sog. Rechenfenster, mit einem Gitter

$$\boldsymbol{r}_{a,b} = (p_0 + a\Delta p, q_0 + b\Delta q), \quad a = 0, \ldots, N_x - 1, \quad b = 0, \ldots, N_y - 1$$

einfachheitshalber äquidistant überzogen. Die Schrittweiten Δp, Δq, Fenstergrenzen p_0, q_0 und Punktzahlen N_x, N_y sollen so gewählt sein, daß sich jede Grenzfläche zweier Bereiche mit unterschiedlicher Permittivität exakt in der Mitte zwischen benachbarten Gitterpunkten befindet. Auf einer festen Querschnittsebene gelten dann die Bezeichnungen:

$$u_{a,b} := u(\boldsymbol{r}_{a,b}, s), \quad v_{a,b} := v(\boldsymbol{r}_{a,b}, s), \quad w_{a,b} := w(\boldsymbol{r}_{a,b}, s).$$

Entsprechend kann man einem Punkt $\boldsymbol{r}_{a,b}$ die Permittivitätswerte $\epsilon_{a,b} = \epsilon$, $m_{a,b} = m$ zuordnen, wenn $\boldsymbol{r}_{a,b}$ auf dem Querschnittsegment mit Permittivität (ϵ, m) liegt, und die Bezeichungsweise auf Ableitungen und halbzahlige Diskretisierungspunkte erweitern, beispielsweise als $(\partial_p v)_{a,b}$ und

$$\boldsymbol{r}_{a+\frac{1}{2},b} = (p_0 + (a + \frac{1}{2})\Delta p, q_0 + b\Delta q).$$

In dieser Notation schreibt sich die diskretisierte Form der Ausbreitungsgleichungen (23) – (25) als

$$\begin{aligned}(\partial_s u)_{a,b} &= \mathrm{i}\frac{n_r^2 - \epsilon_{a,b}}{2n_r} u_{a,b} - \frac{\mathrm{i}}{2n_r}\left((\partial^2_{p^2} u)_{a,b} + (\partial^2_{q^2} u)_{a,b}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2n_r}\frac{m_{a,b}}{\epsilon_{a,b}}\left((\partial^2_{q^2} w)_{a,b} - (\partial^2_{qs} v)_{a,b} + \mathrm{i}n_r(\partial_q v)_{a,b}\right),\end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}(\partial_s v)_{a,b} &= \mathrm{i}\frac{n_r^2 - \epsilon_{a,b}}{2n_r} v_{a,b} - \frac{\mathrm{i}}{2n_r}\left((\partial^2_{p^2} v)_{a,b} + (\partial^2_{q^2} v)_{a,b}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2n_r}\frac{m_{a,b}}{\epsilon_{a,b}}\left((\partial^2_{qs} u)_{a,b} - (\partial^2_{pq} w)_{a,b} - \mathrm{i}n_r(\partial_q u)_{a,b}\right),\end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}(\partial_s w)_{a,b} &= \mathrm{i}\frac{n_r^2 - \epsilon_{a,b}}{2n_r} w_{a,b} - \frac{\mathrm{i}}{2n_r}\left((\partial^2_{p^2} w)_{a,b} + (\partial^2_{q^2} w)_{a,b}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2n_r}\frac{m_{a,b}}{\epsilon_{a,b}}\left((\partial^2_{pq} v)_{a,b} - (\partial^2_{q^2} u)_{a,b}\right).\end{aligned} \tag{65}$$

Approximiert man nun eine komplexwertige Funktion f mit den Funktionswerten f_{a-1}, f_a, f_{a+1} an den äquidistanten Stützstellen $(a-1)\Delta x$, $a\Delta x$,$(a+1)\Delta x$ durch ein Polynom zweiten Grades p in ihrem Argument x, dann sind die erste und zweite Ableitung p', p'' des Polynoms im Punkt $x = a\Delta x$

$$p'(a\Delta x) = \frac{1}{2\Delta x}(f_{a+1} - f_{a-1}) = \frac{1}{2}\left(p'((a-\frac{1}{2})\Delta x) + p'((a+\frac{1}{2})\Delta x)\right),$$

$$p''(a\Delta x) = \frac{1}{\Delta x^2}(f_{a+1} - 2f_a + f_{a-1}) = \frac{1}{\Delta x}\left(p'((a+\frac{1}{2})\Delta x) - p'((a-\frac{1}{2})\Delta x)\right)$$

bei nur genügend kleiner Schrittweite Δx gute Näherungen der Ableitungen zu f im selben Punkt. Das bedeutet mit obiger Schreibweise:

$$(d_x f)_a \approx \frac{1}{2}\left((d_x f)_{a+\frac{1}{2}} + (d_x f)_{a-\frac{1}{2}}\right), \qquad (d_{x^2}^2 f)_a \approx \frac{1}{\Delta x}\left((d_x f)_{a+\frac{1}{2}} - (d_x f)_{a-\frac{1}{2}}\right).$$

Dazu sollen die Ableitungen an den halbzahligen Punkten $j = a \pm \frac{1}{2}$ durch die Differenzenquotienten

$$(d_x f)_j \approx \frac{1}{\Delta x}\left(f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}\right)$$

genähert sein.

In gleicher Weise kann man die partiellen Ableitungen in den rechten Seiten der Gleichungen (63) – (65) durch Differenzenquotienten ersetzen. Die Lage der Diskretisierungspunkte ist nach der Vorgabe oben so gewählt, daß jeder dieser Punkte innerhalb eines Querschnittsegmentes mit konstanter Permittivität liegt, die Gleichungen (63) – (65) also dort gelten. Bei der Diskretisierung treten nun partielle Ableitungen in solchen halbzahligen Punkten auf, die sich gerade auf einem Permittivitätssprung befinden. Es ist immer höchstens ein Index halbzahlig. Dort müssen die Beziehungen (30), (31) und (34), (35) zur Berechnung der Diskretisierung berücksichtigt werden, die Differenzenschemata gewisser Ableitungen sind für Ausgangspunkte auf den beiden Seiten der Grenzflächen verschieden.

Recht einfach ist diese Diskretisierung im planaren, nicht gyrotropen Fall. Bezeichnungen und Lage der Stützstellen können sinngemäß auf einen Index bzw. eine Dimension reduziert werden. Die skalare Ausbreitungsgleichung ist jetzt:

$$(\partial_s v)_a = \mathrm{i}\frac{n_r^2 - \epsilon_a}{2n_r} v_a - \frac{\mathrm{i}}{2n_r}(\partial_{p^2}^2 v)_a. \tag{66}$$

Zunächst ersetzt man die 2. transversale Ableitung wie oben:

$$(\partial_{p^2}^2 v)_a = \frac{1}{\Delta p}\left((\partial_p v)_{a+\frac{1}{2}} - (\partial_p v)_{a-\frac{1}{2}}\right). \tag{67}$$

Befindet sich ein dabei auftretender halbzahliger Indexpunkt j nicht auf einer (horizontalen) Grenzfläche, dann wird die zugehörige 1. Ableitung zu

$$(\partial_p v)_j = \frac{1}{\Delta p}(v_{j+\frac{1}{2}} - v_{j-\frac{1}{2}});$$

ist dies doch der Fall, dann muß die Stetigkeitsbedingung (40) in der Gestalt

$$\frac{1}{\epsilon_{j+\frac{1}{2}}}(\partial_p v)_j^+ = \frac{1}{\epsilon_{j-\frac{1}{2}}}(\partial_p v)_j^- \tag{68}$$

eingearbeitet werden. Dabei unterscheidet ein hochgestellter Index $\pm$ die Ausgangspunkte $j \pm \frac{1}{2}$ (Punkt a in der Ausbreitungsgleichung), denen die Ableitung $(\partial_p v)_j$ zugeordnet sein kann. Nun legt die Stetigkeit von v in $j\Delta p$ in der Form

$$v_{j-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta p}{2}(\partial_p v)_j^- = v_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta p}{2}(\partial_p v)_j^+$$

die beiden Unbekannten $(\partial_p v)_j^-$, $(\partial_p v)_j^+$ in (68) fest, und zwar zu

$$(\partial_p v)_j^+ = \frac{2\epsilon_{j+\frac{1}{2}}}{\epsilon_{j-\frac{1}{2}} + \epsilon_{j+\frac{1}{2}}} \frac{v_{j+\frac{1}{2}} - v_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta p}$$

und

$$(\partial_p v)_j^- = \frac{2\epsilon_{j-\frac{1}{2}}}{\epsilon_{j-\frac{1}{2}} + \epsilon_{j+\frac{1}{2}}} \frac{v_{j+\frac{1}{2}} - v_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta p}.$$

Demnach gilt in einem Punkt $a\Delta p$ oberhalb einer horizontalen Grenzfläche in $(a - \frac{1}{2})\Delta p$ für die Ableitung $(\partial_p v)_{a-\frac{1}{2}}$ in (67) das Diskretisierungsschema

$$(\partial_p v)_{a-\frac{1}{2}} = \frac{2\epsilon_a}{\epsilon_{a-1} + \epsilon_a} \frac{v_a - v_{a-1}}{\Delta p}.$$

Analog lassen sich auch alle übrigen Diskretisierungsschemata ausrechnen. Die Außerdiagonalelemente in der Permittivität gehen wie in den Näherungen aus (2.1) nur in erster Ordnung ein. Dabei entstehen nach den Grenzflächengleichungen verschiedene Verknüpfungen der Komponenten u, v, w; außerdem treten weitere einfache Ableitungen in Ausbreitungsrichtung auf. Im obigen Beispiel müßte die s–Ableitung am halbzahligen Indexpunkt $j\Delta p$ auf einer horizontalen Grenzfläche als

$$(\partial_s v)_j = \frac{\epsilon_{j-\frac{1}{2}}}{\epsilon_{j-\frac{1}{2}} + \epsilon_{j+\frac{1}{2}}}(\partial_s v)_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\epsilon_{j+\frac{1}{2}}}{\epsilon_{j-\frac{1}{2}} + \epsilon_{j+\frac{1}{2}}}(\partial_s v)_{j-\frac{1}{2}}$$

diskretisiert werden. Partielle s–Ableitungen an ganzzahligen Indexpunkten verbleiben zunächst unverändert. In jedem Fall gehen die Formeln zur Diskretisierung von Ableitungen an einer Permittivitätsgrenze in diejenigen für die Ableitung an einem inneren Punkt über, wenn man die Permittivitätswerte auf beiden Seiten gleichsetzt.

Am Ende der Rechnungen steht dann eine Reihe von Regeln, nach denen die transversalen Ableitungen in den Gleichungen (63) – (65) durch Differenzenquotienten zu ersetzen sind. Mit dem Zeichen $::=$ in der Bedeutung von „wird zu“ lauten diese Regeln in tabellarischer Form:

Zweifache Ableitungen:

- $(\partial_{p^2}^2 f)_{a,b} ::= \frac{1}{\Delta p}\left((\partial_p f)_{a+\frac{1}{2},b} - (\partial_p f)_{a-\frac{1}{2},b}\right), \qquad f = u, v, w$
- $(\partial_{q^2}^2 f)_{a,b} ::= \frac{1}{\Delta q}\left((\partial_q f)_{a,b+\frac{1}{2}} - (\partial_q f)_{a,b-\frac{1}{2}}\right), \qquad f = u, v, w$
- $(\partial_{pq}^2 f)_{a,b} ::= \frac{1}{\Delta p}\left((\partial_q f)_{a+\frac{1}{2},b} - (\partial_q f)_{a-\frac{1}{2},b}\right), \qquad f = v, w$

- $$(\partial_{qs}^2 f)_{a,b} ::= \frac{1}{\Delta q}\left((\partial_s f)_{a,b+\frac{1}{2}} - (\partial_s f)_{a,b-\frac{1}{2}}\right), \qquad f = u, v$$

Einfache Ableitungen:
x und y sollen in diesem Abschnitt halb- oder ganzzahlige Indizes bezeichnen. Ein halbzahliger Index x gehört zu einer horizontalen Grenzfläche, falls gilt: $\epsilon_{x+\frac{1}{2},y} \neq \epsilon_{x-\frac{1}{2},y}$ oder $m_{x+\frac{1}{2},y} \neq m_{x-\frac{1}{2},y}$, für ganzzahliges y. Ein halbzahliger Index y gehört zu einer vertikalen Grenzfläche, falls gilt: $\epsilon_{x,y+\frac{1}{2}} \neq \epsilon_{x,y-\frac{1}{2}}$ oder $m_{x,y+\frac{1}{2}} \neq m_{x,y-\frac{1}{2}}$, für ganzzahliges x. Bei der Ersetzung einer partiellen Ableitung am Punkt mit Indizes x, y ist nun zu unterscheiden, ob

- x halb– oder ganzzahlig ist: Spalte x, Einträge $\frac{1}{2}$, 1 in den folgenden Tabellen,
- y halb– oder ganzzahlig ist: Spalte y, Einträge $\frac{1}{2}$, 1,
- x eine horizontale Grenzfläche bezeichnet: Spalte G_x, Einträge $+$, $-$,
- y eine vertikale Grenzfläche bezeichnet: Spalte G_y, Einträge $+$, $-$.

Dann lautet das Ersetzungsschema zum Ausgangspunkt mit Indizes (a, b) in Tabellenform (längere Formeln sind am Ende angefügt):

- $(\partial_p u)_{x,y}$:

x	y	G_x	G_y	
$\frac{1}{2}$	1	$\pm$	/	$(\partial_p u)_{x,y} ::= \frac{1}{\Delta p}\left(u_{x+\frac{1}{2},y} - u_{x-\frac{1}{2},y}\right)$

- $(\partial_p v)_{x,y}$:

x	y	G_x	G_y	
1	1	/	/	$(\partial_p v)_{x,y} ::= \frac{1}{2}\left((\partial_p v)_{x+\frac{1}{2},y} + (\partial_p v)_{x-\frac{1}{2},y}\right)$
$\frac{1}{2}$	1	$-$	/	$(\partial_p v)_{x,y} ::= \frac{1}{\Delta p}\left(v_{x+\frac{1}{2},y} - v_{x-\frac{1}{2},y}\right)$
$\frac{1}{2}$	1	$+$	/	$(\partial_p v)_{x,y} ::= \begin{cases} (\partial_p v)^-_{x,y}, & \text{falls} \quad a = x - \frac{1}{2} \quad (69) \\ (\partial_p v)^+_{x,y}, & \text{falls} \quad a = x + \frac{1}{2} \quad (70) \end{cases}$
1	$\frac{1}{2}$	/	$\pm$	$(\partial_p v)_{x,y} ::= \frac{1}{2\Delta p}\left(v_{x+1,y} - v_{x-1,y}\right)$

- $(\partial_p w)_{x,y}$:

x	y	G_x	G_y	
$\frac{1}{2}$	1	$-$	/	$(\partial_p w)_{x,y} ::= \frac{1}{\Delta p}\left(w_{x+\frac{1}{2},y} - w_{x-\frac{1}{2},y}\right)$
$\frac{1}{2}$	1	$+$	/	$(\partial_p w)_{x,y} ::= \begin{cases} (\partial_p w)^-_{x,y}, & \text{falls} \quad a = x - \frac{1}{2} \quad (71) \\ (\partial_p w)^+_{x,y}, & \text{falls} \quad a = x + \frac{1}{2} \quad (72) \end{cases}$

- $(\partial_q u)_{x,y}$:

x	y	G_x	G_y	
1	1	/	/	$(\partial_q u)_{x,y} ::= \frac{1}{2}\left((\partial_q u)_{x,y+\frac{1}{2}} + (\partial_q u)_{x,y-\frac{1}{2}}\right)$
$\frac{1}{2}$	1	$\pm$	/	$(\partial_q u)_{x,y} ::= \frac{1}{2\Delta q}\left(u_{x,y+1} - u_{x,y-1}\right)$
1	$\frac{1}{2}$	/	$-$	$(\partial_q u)_{x,y} ::= \frac{1}{\Delta q}\left(u_{x,y+\frac{1}{2}} - u_{x,y-\frac{1}{2}}\right)$
1	$\frac{1}{2}$	/	$+$	$(\partial_q u)_{x,y} ::= \begin{cases} (\partial_q u)^-_{x,y}, & \text{falls} \quad b = y - \frac{1}{2} \quad (73) \\ (\partial_q u)^+_{x,y}, & \text{falls} \quad b = y + \frac{1}{2} \quad (74) \end{cases}$

- $(\partial_q v)_{x,y}$:

x	y	G_x	G_y	
1	1	/	/	$(\partial_q v)_{x,y} ::= \frac{1}{2}\left((\partial_q v)_{x,y+\frac{1}{2}} + (\partial_q v)_{x,y-\frac{1}{2}}\right)$
$\frac{1}{2}$	1	$\pm$	/	$(\partial_q v)_{x,y} ::= \frac{1}{2\Delta q}\left(v_{x,y+1} - v_{x,y-1}\right)$
1	$\frac{1}{2}$	/	$\pm$	$(\partial_q v)_{x,y} ::= \frac{1}{\Delta q}\left(v_{x,y+\frac{1}{2}} - v_{x,y-\frac{1}{2}}\right)$

- $(\partial_q w)_{x,y}$:

x	y	G_x	G_y	
1	1	/	/	$(\partial_q w)_{x,y} ::= \frac{1}{2}\left((\partial_q w)_{x,y+\frac{1}{2}} + (\partial_q w)_{x,y-\frac{1}{2}}\right)$
$\frac{1}{2}$	1	$\pm$	/	$(\partial_q w)_{x,y} ::= \frac{1}{2\Delta q}\left(w_{x,y+1} - w_{x,y-1}\right)$
1	$\frac{1}{2}$	/	$-$	$(\partial_q w)_{x,y} ::= \frac{1}{\Delta q}\left(w_{x,y+\frac{1}{2}} - w_{x,y-\frac{1}{2}}\right)$
1	$\frac{1}{2}$	/	$+$	$(\partial_q w)_{x,y} ::= \begin{cases} (\partial_q w)^-_{x,y}, & \text{falls} \quad b = y - \frac{1}{2} \quad (75) \\ (\partial_q w)^+_{x,y}, & \text{falls} \quad b = y + \frac{1}{2} \quad (76) \end{cases}$

- $(\partial_s v)_{x,y}$:

x	y	G_x	G_y	
1	$\frac{1}{2}$	/	$\pm$	$(\partial_s v)_{x,y} ::= \frac{1}{2}\left((\partial_s v)_{x,y+\frac{1}{2}} + (\partial_s v)_{x,y-\frac{1}{2}}\right)$
$\frac{1}{2}$	1	$+$	/	$(\partial_s v)_{x,y} ::= (\partial_s v)^0_{x,y}$ (77), tritt nur mit Koeffizient $\sim m$ auf

- $(\partial_s u)_{x,y}$:

x	y	G_x	G_y	
$\frac{1}{2}$	1	$\pm$	/	$(\partial_s u)_{x,y} ::= \frac{1}{2}\left((\partial_s u)_{x+\frac{1}{2},y} + (\partial_s u)_{x-\frac{1}{2},y}\right)$
1	$\frac{1}{2}$	/	$-$	$(\partial_s u)_{x,y} ::= \frac{1}{2}\left((\partial_s u)_{x,y+\frac{1}{2}} + (\partial_s u)_{x,y-\frac{1}{2}}\right)$
1	$\frac{1}{2}$	/	$\pm$	$(\partial_s u)_{x,y} ::= (\partial_s u)^0_{x,y}$ (78), tritt nur mit Koeffizient $\sim m$ auf

Feldwerte an halbzahligen Punkten:
Gelegentlich werden für obige Ableitungen geeignet gemittelte Werte der Funktionen u, v, w an gedachten Gitterpunkten mit halbzahligen Indizes benötigt. Die Mittelungsregeln lauten in der Tabellenkonvention wie oben:

- $u_{x,y}$:

x	y	G_x	G_y	
$\frac{1}{2}$	1	$\pm$	/	$u_{x,y} ::= \frac{1}{2}\left(u_{x+\frac{1}{2},y} + u_{x-\frac{1}{2},y}\right)$

- $v_{x,y}$:

x	y	G_x	G_y	
1	$\frac{1}{2}$	/	$\pm$	$v_{x,y} ::= \frac{1}{2}\left(v_{x,y+\frac{1}{2}} + v_{x,y-\frac{1}{2}}\right)$
$\frac{1}{2}$	1	$-$	/	$v_{x,y} ::= \frac{1}{2}\left(v_{x+\frac{1}{2},y} + v_{x-\frac{1}{2},y}\right)$
$\frac{1}{2}$	1	$+$	/	$v_{x,y} ::= v^0_{x,y}$ (79), tritt nur mit Koeffizient $\sim m$ auf

- $w_{x,y}$:

x	y	G_x	G_y	
$\frac{1}{2}$	1	$-$	/	$w_{x,y} ::= \frac{1}{2}\left(w_{x+\frac{1}{2},y} + w_{x-\frac{1}{2},y}\right)$
$\frac{1}{2}$	1	$+$	/	siehe (80)

Nun bleiben noch die in den Tabellen fortgelassenen Formeln nachzutragen. Indizes $\pm$ kürzen darin bei halbzahligem x den Ausdruck $(x \pm \frac{1}{2}, y)$ bzw. bei halbzahligem y den Ausdruck $(x, y \pm \frac{1}{2})$ ab.

$$(\partial_p v)^-_{x,y} \;::=\; \frac{1}{\epsilon_- + \epsilon_+ - c_m\frac{n_r\Delta p}{2}}\Bigg((2\epsilon_- - c_m\frac{n_r\Delta p}{2})\frac{v_+ - v_-}{\Delta p} + (\epsilon_+ - \epsilon_-)(\partial_q u)_{x,y} - \mathrm{i}c_m((\partial_q w)_{x,y} - (\partial_s v)^0_{x,y}) + c_m n_r\frac{v_+ + v_-}{2}\Bigg) \tag{69}$$

$$(\partial_p v)^+_{x,y} \;::=\; \frac{1}{\epsilon_- + \epsilon_+ - c_m\frac{n_r\Delta p}{2}}\Bigg((2\epsilon_+ - c_m\frac{n_r\Delta p}{2})\frac{v_+ - v_-}{\Delta p} + (\epsilon_- - \epsilon_+)(\partial_q u)_{x,y} + \mathrm{i}c_m((\partial_q w)_{x,y} - (\partial_s v)^0_{x,y}) - c_m n_r\frac{v_+ + v_-}{2}\Bigg) \tag{70}$$

In (69) und (70) ist $c_m = m_-\frac{\epsilon_+}{\epsilon_-} - m_+\frac{\epsilon_-}{\epsilon_+}$.

$$(\partial_p w)^-_{x,y} ::= \frac{2\epsilon_-}{\epsilon_- + \epsilon_+}\frac{w_+ - w_-}{\Delta p} + \frac{\epsilon_+ - \epsilon_-}{\epsilon_- + \epsilon_+}\left((\partial_s u)_{x,y} - \mathrm{i}n_r u_{x,y}\right) \tag{71}$$

$$(\partial_p w)^+_{x,y} ::= \frac{2\epsilon_+}{\epsilon_- + \epsilon_+}\frac{w_+ - w_-}{\Delta p} + \frac{\epsilon_- - \epsilon_+}{\epsilon_- + \epsilon_+}\left((\partial_s u)_{x,y} - \mathrm{i}n_r u_{x,y}\right) \tag{72}$$

$$(\partial_q u)^-_{x,y} \;::=\; \frac{\epsilon_+ - \epsilon_-}{\epsilon_- + \epsilon_+}(\partial_p v)_{x,y} + \frac{2\epsilon_-}{\epsilon_- + \epsilon_+}\frac{u_+ - u_-}{\Delta q} - 2\mathrm{i}c'_m(\mathrm{i}n_r v_{x,y} - (\partial_s v)_{x,y}) - 2\mathrm{i}c'_m\frac{w_+ - w_-}{\Delta q} \tag{73}$$

$$(\partial_q u)^+_{x,y} \;::=\; \frac{\epsilon_- - \epsilon_+}{\epsilon_- + \epsilon_+}(\partial_p v)_{x,y} + \frac{2\epsilon_+}{\epsilon_- + \epsilon_+}\frac{u_+ - u_-}{\Delta q} + 2\mathrm{i}c'_m(\mathrm{i}n_r v_{x,y} - (\partial_s v)_{x,y}) + 2\mathrm{i}c'_m\frac{w_+ - w_-}{\Delta q} \tag{74}$$

$$(\partial_q w)^-_{x,y} \;::=\; \frac{\epsilon_- - \epsilon_+}{\epsilon_- + \epsilon_+}(\mathrm{i}n_r v_{x,y} - (\partial_s v)_{x,y}) + \frac{2\epsilon_-}{\epsilon_- + \epsilon_+}\frac{w_+ - w_-}{\Delta q} - 2\mathrm{i}c'_m(\partial_p v)_{x,y} + 2\mathrm{i}c'_m\frac{u_+ - u_-}{\Delta q} \tag{75}$$

$$(\partial_q w)^+_{x,y} \quad ::= \quad \frac{\epsilon_+ - \epsilon_-}{\epsilon_- + \epsilon_+}(\mathrm{i}n_r v_{x,y} - (\partial_s v)_{x,y}) + \frac{2\epsilon_+}{\epsilon_- + \epsilon_+}\frac{w_+ - w_-}{\Delta q} \qquad (76)$$
$$+ 2\mathrm{i}c'_m(\partial_p v)_{x,y} - 2\mathrm{i}c'_m\frac{u_+ - u_-}{\Delta q}$$

In (73) – (76) ist $c'_m = \dfrac{m_+\epsilon_- - m_-\epsilon_+}{(\epsilon_- + \epsilon_+)^2}$.

$$(\partial_s v)^0_{x,y} \quad ::= \quad \frac{\epsilon_+}{\epsilon_- + \epsilon_+}(\partial_s v)_- + \frac{\epsilon_-}{\epsilon_- + \epsilon_+}(\partial_s v)_+ \qquad (77)$$
$$+ \frac{\Delta p}{8\Delta q}\frac{\epsilon_+ - \epsilon_-}{\epsilon_- + \epsilon_+}\Big((\partial_s u)_{x+\frac{1}{2},y+1} - (\partial_s u)_{x+\frac{1}{2},y-1} + (\partial_s u)_{x-\frac{1}{2},y+1} - (\partial_s u)_{x-\frac{1}{2},y-1}\Big)$$

$$(\partial_s u)^0_{x,y} \quad ::= \quad \frac{\epsilon_+}{\epsilon_- + \epsilon_+}(\partial_s u)_- + \frac{\epsilon_-}{\epsilon_- + \epsilon_+}(\partial_s u)_+ \qquad (78)$$
$$+ \frac{\Delta q}{8\Delta p}\frac{\epsilon_+ - \epsilon_-}{\epsilon_- + \epsilon_+}\Big((\partial_s v)_{x+1,y+\frac{1}{2}} - (\partial_s v)_{x-1,y+\frac{1}{2}} + (\partial_s v)_{x+1,y-\frac{1}{2}} - (\partial_s v)_{x-1,y-\frac{1}{2}}\Big)$$

$$v^0_{x,y} \quad ::= \quad \frac{\epsilon_+}{\epsilon_- + \epsilon_+}v_- + \frac{\epsilon_-}{\epsilon_- + \epsilon_+}v_+ \qquad (79)$$
$$+ \frac{\Delta p}{8\Delta q}\frac{\epsilon_+ - \epsilon_-}{\epsilon_- + \epsilon_+}\Big(u_{x+\frac{1}{2},y+1} - u_{x+\frac{1}{2},y-1} + u_{x-\frac{1}{2},y+1} - u_{x-\frac{1}{2},y-1}\Big)$$

$$w_{x,y} \quad ::= \quad \frac{\epsilon_+}{\epsilon_- + \epsilon_+}w_- + \frac{\epsilon_-}{\epsilon_- + \epsilon_+}w_+ \qquad (80)$$
$$+ \frac{\Delta p}{2}\frac{\epsilon_+ - \epsilon_-}{\epsilon_- + \epsilon_+}((\partial_s u)_{x,y} - \mathrm{i}n_r u_{x,y})$$

Die transversalen Diskretisierungsschemata zur planaren Situation (2.6) ergeben sich aus den oben genannten, nachdem der zweite untere Index aller Größen und sämtliche Terme, die die Funktionen u oder w bzw. deren Ableitungen enthalten, gestrichen sind. Gesonderte Tabellen sollten sich erübrigen. Schreibt man die dann wesentlich vereinfachten Schemata für einen Diskretisierungspunkt auf, der sich sowohl unterhalb als auch oberhalb einer Permittivitätsgrenze befindet, also für eine überall veränderliche, aber diskretisierte Permittivität, dann entstehen die in [4] für diesen Fall angegebenen kompakteren Formeln.

3.2 Longitudinale Diskretisierung

Für die weiteren Rechnungen faßt man nun die Feld– und Ableitungswerte auf einem festen Querschnitt zu Vektoren $\boldsymbol{h}$ und $(\partial_s \boldsymbol{h})$ zusammen:

$$h_{3j} = u_j, \quad h_{3j+1} = v_j, \quad h_{3j+2} = w_j, \qquad (81)$$
$$j = aN_y + b; \quad a = 0, \ldots, N_x - 1; \quad b = 0, \ldots, N_y - 1;$$

in gleicher Weise die Ableitungswerte. Zur Erinnerung: s bezeichnet die dimensionslose Ausbreitungskoordinate $k_0 z$. Dann liefern die bisherige Diskretisierung bzw. die später unter (3.4) vorgestellten Randbedingungsalgorithmen zu jedem der $N_h = 3N_xN_y$ neuen Indexwerte l eine Gleichung der Form

$$(\partial_s h)_l = \sum_{j=0}^{N_h-1} b_{lj}h_j + \sum_{j=0}^{N_h-1} c_{lj}(\partial_s h)_j$$

oder

$$A(\partial_s \boldsymbol{h}) = B\boldsymbol{h}. \tag{82}$$

Die Einträge $a_{lj} = \delta_{lj} - c_{lj}$, b_{lj} der Matrizen A, B sind überwiegend null, andernfalls aus den Vorschriften des letzten Abschnitts berechnet ($\delta_{lj} = 1$ für $l = j$, 0 sonst).

Nun wird auch in Ausbreitungsrichtung diskretisiert. Die Berechnung soll von einer Querschnittsfläche in s_0 starten und longitudinale Schrittweiten Δs verwenden. Ein hochgestellter Index r an einem Symbol bezeichne den Wert auf dem Querschnitt $s = s_0 + r\Delta s$. In dieser Notation lassen sich zwei plausible Differenzenschemata für die Ableitungen $(\partial_s \boldsymbol{h})$ angeben:

$$\frac{1}{\Delta s}\left(\boldsymbol{h}^{r+1} - \boldsymbol{h}^r\right) = (\partial_s \boldsymbol{h})^r$$

und

$$\frac{1}{\Delta s}\left(\boldsymbol{h}^{r+1} - \boldsymbol{h}^r\right) = (\partial_s \boldsymbol{h})^{r+1}.$$

Erstere wird als *explizite*, die zweite als *implizite* Diskretisierung bezeichnet. In der hier behandelten Situation führen beide Versionen auf lineare Gleichungssysteme mit den neuen Feldvariablen $\boldsymbol{h}^{r+1}$ als Unbekannten. Nach Untersuchungen in [14] oder [15] für vergleichbare, einfachere Situationen und eigenen Erfahrungen in der Implementierung zeigt sich, daß ein stabiler Ausbreitungsalgorithmus nur dann möglich ist, wenn man beide Schemata mit einem Diskretisierungsparameter $1/2 \leq \alpha \leq 1$ in der Form

$$\frac{1}{\Delta s} A\left(\boldsymbol{h}^{r+1} - \boldsymbol{h}^r\right) = \alpha B\boldsymbol{h}^{r+1} + (1-\alpha)B\boldsymbol{h}^r \tag{83}$$

kombiniert. Das Schema mit Parameterwert $\alpha = 1/2$ wird als *Crank–Nicolson* Differenzenschema bezeichnet [23].

Ein Ausbreitungsschritt setzt nun die am Querschnitt r diskretisierten Feldwerte $\boldsymbol{h}^r$ um die Strecke Δs zum Querschnitt $r+1$ als Lösung $\boldsymbol{h}^{r+1}$ des linearen $N_h \times N_h$–Gleichungssystems

$$\left(\frac{1}{\Delta s}A - \alpha B\right)\boldsymbol{h}^{r+1} = \left(\frac{1}{\Delta s}A + (1-\alpha)B\right)\boldsymbol{h}^r \tag{84}$$

fort.

Die genaue Wahl der Größe α ist dabei durchaus diskussionsbedürftig, vgl. [15]. Ein Wert $\alpha < 1/2$ verursacht recht schnelle Explosionen des Feldes. $\alpha = 1/2$ erzeugt im planaren Fall meistens stabile Ausbreitungsrechnungen, aber im gleichen Sinne wie in Abb. 19 dargestellt unruhige Felder. Im dreidimensionalen Fall war damit eine Modenausbreitung über lange Distanzen nicht möglich. $\alpha > 1/2$ führt zu glatteren Modenfeldern, bewirkt aber einen stärkeren Leistungsverlust des eingeschwungenen Feldes. Schließlich scheint die beste Wahl nicht unabhängig von allen anderen Parametern der Simulation möglich. Die Rechnungen in dieser Arbeit verwenden je nach Bedarf Werte zwischen 0.5 und 0.55.

3.3 Das SPARSE - Paket

Die Diskretisierungen in transversaler und longitudinaler Richtung führen auf komplexe lineare Gleichungssysteme mit sehr großen, aber nur schwach besetzen, unsymmetrischen Matrizen ohne klare Bandstruktur. Dieser Problemstellung sind die C–Unterprogramme der SPARSE–Programmsammlung [16] recht gut angepaßt. Sämtliche numerischen Rechnungen zu dieser Arbeit bauen darauf auf.

Eine Lösung $\boldsymbol{x}$ zum linearen Gleichungssystem $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ wird darin in zwei Schritten berechnet: In einem ersten zerlegt ein Unterprogramm die Matrix M nach geeigneten Permutationen in eine Links– und eine Rechtsdreiecksmatrix (LR–Zerlegung); im zweiten Schritt ergibt das Einsetzen der rechten Seite $\boldsymbol{b}$ in die Dreiecksmatrizen die Lösung $\boldsymbol{x}$. Nähere Einzelheiten des Algorithmus finden sich beispielsweise in [23].

Wichtig für die Ausbreitungsrechnungen ist, daß die LR–Zerlegung zu Anfang die Dimension der Matrizen bzw. die Zahl der Einträge über den verfügbaren Speicherplatz begrenzt. Die Dimension der Matrizen ergibt sich aus den Diskretisierungsschrittweiten und der Größe des Rechenfensters, die Anzahl der Einträge erhöht sich zusätzlich bei der Modellierung von magnetisierten Schichten und Permittivitätssprüngen. Dabei ist im Allgemeinen der Speicherplatzbedarf zum Ablegen der Matrizeneinträge und Vektoren in (84) vergleichsweise gering. Während der außerdem sehr zeitaufwendigen Zerlegung wächst die Anzahl der nichtverschwindenden Matrixelemente jedoch stark an. Bei der Simulation eines längshomogenen Wellenleiters ist dieser limitierende Prozeß nur einmal zu Beginn des ersten Ausbreitungsschrittes notwendig, in den folgenden Schritten berechnen sich die neuen Feldvariablen aus der während der Simulation gleichbleibenden bereits zerlegten Matrix.

Beispielsweise verhält sich in einer Situation mit $60 \times 70 \times 3$ Variablen und 63708 Matrizeneinträgen zur vektoriellen Simulation eines nichtmagnetooptischen Rippenwellenleiters in (5.4) die Zeitdauer eines Einsetzvorgangs zur Zeit für die Zerlegung wie $1/400$, bei der Zerlegung wächst der vom Programm dynamisch belegte Speicherplatz etwa um den Faktor 5.

Bei der Modellierung eines längsinhomogenen Wellenleiters müssen dagegen nach einer gewissen Anzahl Ausbreitungsschritte die Matrizen an die geänderte Permittivität angepaßt werden. Das bedeutet vor allem erheblich gesteigerte Rechenzeiten: im planaren, zweidimensionalen Fall nur lästig, macht dieser Mehraufwand die Simulationen in der dreidimensionalen längsinhomogenen Situation nahezu unmöglich.

3.4 Randbedingungen

Die Diskretisierungsschemata in (3.1) lassen sich lediglich in solchen Punkten anwenden, die genügend viele Nachbarpunkte besitzen. An den Randpunkten sind zur Vervollständigung der Ausbreitungsmatrizen nun ebenfalls geeignete Gleichungen zu ergänzen. Diese Gleichungen bzw. damit verbundene Verfahren müssen sicherstellen, daß in Form von Wellenpaketen mit fortschreitender Ausbreitungskoordinate auf den Rand zulaufende Strahlung den Bereich des Rechenfensters verläßt und nicht am Rand reflektiert wird.

Dieser Effekt kann beispielsweise erreicht werden, indem man die Permittivitäten an den Randbereichen des Rechenfensters mit einem nach außen ansteigenden Imaginärteil im Brechungsindex versieht [17]. Um eine ausreichende Wirkung dieser Randbedingungen zu erzielen muß der absorbierende Bereich nach einer sorgfältigen Anpassung der beteiligten Parameter recht breit sein, siehe [11]. Das sollte bei planaren Simulationen kein Problem sein, reduziert jedoch im dreidimensionalen Fall die Anzahl der innerhalb zur Verfügung stehenden Punkte beträchtlich und ist nach Möglichkeit zu vermeiden.

Die Methode der Wahl scheinen zur Zeit die transparenten Randbedingungen („transparent boundary conditions“ , TBC) nach [10], [11] zu sein, auch jene haben jedoch im Hinblick auf (3.3) gewisse Nachteile. Die

Simulationen dieser Arbeit verwenden einen daraus abgeleiteten Algorithmus mit zumindest vergleichbarer Leistungsfähigkeit.

3.4.1 Transparente Randbedingungen

Ausgehend von Betrachtungen zur Energieströmung durch die Grenzen eines zunächst zweidimensionalen Rechenbereiches in kontinuierlicher und diskretisierter Form wird in [11] eine Methode zur Implementierung von Randbedingungen vorgestellt, die nichtvorhandene Grenzen modellieren soll. Das Verfahren basiert auf dem Ansatz, daß das elektromagnetische Feld in der Nähe einer Rechenfenstergrenze eine exponentielle Abhängigkeit von der zum Rand normalen Transversalrichtung besitzt und leitet daraus Verknüpfungen der äußeren Feldwerte ab, die den exakten Energiefluß an der gleichen Stelle auf einem nicht beschränkten Rechenfenster nachbilden.

Der Algorithmus soll unabhängig von den simulierten Permittivitätsstrukturen sein. Unter der Annahme, daß in späteren Anwendungen die Struktur in den Randbereichen des Rechenfensters isotrop und homogen ist, reicht zur Herleitung ein solches Medium mit konstantem Brechungsindex n. Beschränkt man sich zunächst auf eine transversale Koordinate x, dann erfüllt jede Komponente F des Modulationsfeldes auf dem gesamten Rechenfenster die skalare Gleichung

$$\partial_z F = \frac{\mathrm{i}k_0}{2n_r}(n_r^2 - n^2) - \frac{\mathrm{i}}{2k_0 n_r}\partial_{x^2}^2 F. \tag{85}$$

Das Rechenfenster soll das Intervall $[x_0, x_1]$ umfassen. Für die Änderung der Gesamtenergie auf diesem Intervall bei der Ausbreitung läßt sich dann die Beziehung

$$\partial_z \int_{x_0}^{x_1} |F(x,z)|^2\, dx = \mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{\Phi}_0 \tag{86}$$

mit

$$\mathbf{\Phi}_1 = -\frac{\mathrm{i}}{2k_0 n_r}\left(F^*(\partial_x F) - F(\partial_x F^*)\right)(x_1, z),$$

$$\mathbf{\Phi}_0 = -\frac{\mathrm{i}}{2k_0 n_r}\left(F(\partial_x F^*) - F^*(\partial_x F)\right)(x_0, z)$$

finden. Die Randbedingungen müssen in jedem Fall eine negative Änderung bewirken.

Kern des TBC–Verfahrens ist nun die Annahme, daß das Feld auf dem festen Querschnitt z in der Nähe des oberen Randes in x_1 die Gestalt

$$F(x) = F_0\,\mathbf{e}^{-\mathrm{i}kx} \tag{87}$$

besitzt, mit komplexen Konstanten F_0, k, die so bestimmt sein sollen, daß (87) gerade F und $\partial_x F$ des Feldes in x_1 und damit auch $\mathbf{\Phi}_1$ korrekt nachbildet. F_0 und k ändern sich mit z. Dann gilt für den Energiefluß $\mathbf{\Phi}_1$ über diese Grenze:

$$\mathbf{\Phi}_1 = -\frac{\mathrm{Re}\,k|F|^2}{k_0 n_r}.$$

Die Größe ist negativ, sofern nur $\mathrm{Re}\,(k)$ positiv ausfällt. In [11] sind obige Aussagen auf die diskretisierte Situation übertragen, mit analogem Ergebnis. Man erzwingt deshalb im Punkt mit Index $M = N_x - 1$ eine

Feldform wie oben nach folgendem Algorithmus. Die Bezeichnungen darin entsprechen denen aus (3.1), für unskalierte Größen:

Auf dem Querschnitt Nr. r seien die Feldwerte F_j^r bereits berechnet, sie bestimmen über eine geeignete Vorschrift die neue Größe k^{r+1} zur Fortsetzung des Feldes am Rand. Als Randbedingung im nächsten Ausbreitungsschritt dient die Gleichung

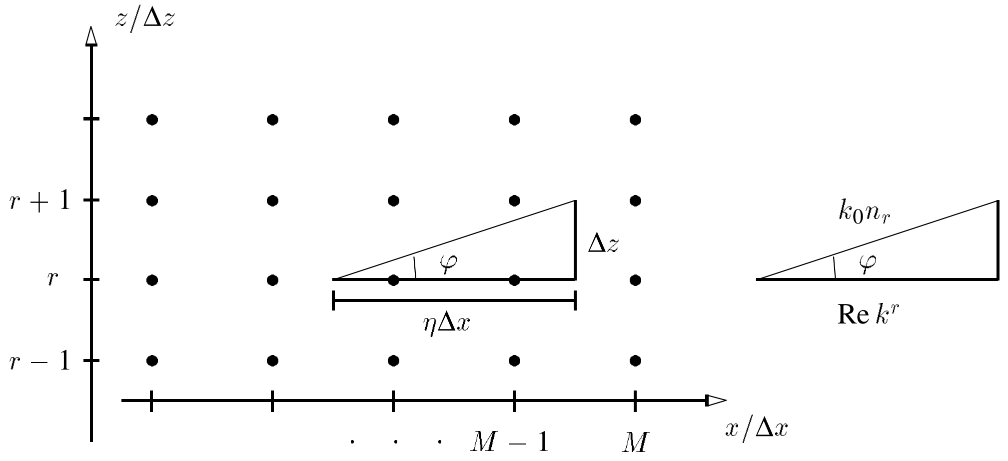
$$F_M^{r+1} - F_{M-1}^{r+1}\,\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k^{r+1}\Delta x} = 0. \tag{88}$$

Vorher wurde der Wert F_M^r zu

$$F_M^r := F_{M-1}^r\,\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k^{r+1}\Delta x} \tag{89}$$

korrigiert, so daß alle beteiligten Feldwerte gerade der Bedingung (87) genügen:
$F_M^{r+1}/F_{M-1}^{r+1} = F_M^r/F_{M-1}^r = \mathbf{e}^{-\mathrm{i}k^{r+1}\Delta x}$.

Nach [11] soll k^{r+1} dabei aus Feldwerten an dem Ort hervorgehen, dessen Lage bezüglich Punkt Nr. M im $r+1$ Schritt dem von Re k^r vorgegebenen Winkel entspricht. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, die sich im Gitter aus x– und z– Diskretisierung verdeutlichen lassen:



Falls die Größe η in der Gleichung

$$\frac{\eta\Delta x}{\Delta z} = \frac{\mathrm{Re}\,k^r}{\sqrt{k_0^2 n_r^2 - (\mathrm{Re}\,k^r)^2}}$$

größer oder gleich 1 ist, wird k^{r+1} am ehesten durch die Feldwerte um den Indexpunkt Nr. $M-\eta$ beeinflußt und berechnet aus

$$\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k^{r+1}\Delta x} = \frac{F_{M-\eta}^r}{F_{M-\eta-1}^r},$$

η auf die nächste ganze Zahl gerundet. Im anderen Fall $\eta \leq 1$ wären für ein Schema wie oben Feldwerte aus Ausbreitungsschritten vor r notwendig. Statt dessen mittelt man den Einfluß der aus den Punkten mit Indizes M, $M-1$ und $M-1$, $M-2$ gewonnenen k–Werte als

$$\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k^{r+1}\Delta x} = \eta \frac{F^r_{M-1}}{F^r_{M-2}} + (1-\eta)\,\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k^r\Delta x}.$$

Gelegentlich beschreibt k^{r+1} eine einwärts gerichtete Welle; wenn also $\mathrm{Re}\,k^{r+1}$ kleiner 0 ist, setze $\mathrm{Re}\,k^{r+1} := 0$ bzw. $\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k^{r+1}\Delta x} := |\,\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k^{r+1}\Delta x}|$.

Beide Vorschriften stimmen für $\eta = 1$ überein und ergeben dann das in [11] mit „simple TBC“, (STBC) bezeichnete Verfahren aus [10] ohne die obige Winkelanpassung, dessen Leistungsfähigkeit nach den dort durchgeführten Tests kaum geringer ist als das der hier wiedergegebenen Methode.

Die analogen Rechenvorschriften für den unteren Rand erhält man durch Tausch der Indizes M, $M-1$, $M-2, \ldots$ gegen $0, 1, 2, \ldots$. In jedem Ausbreitungsschritt ergänzen dann die skalierten Gleichungen (88) die ersten und letzten Zeilen der Matrizen der linken Seite in (84). Auf einem zweidimensionalen Rechenfenster wäre der beschriebene Algorithmus einzeln auf die Enden der Zeilen und Spalten des Diskretisierungsgitters anzuwenden. Näheres dazu findet sich in [11].

Der oben geschilderte Algorithmus erweist sich nach Erfahrungen bei zweidimensionalen Ausbreitungsrechnungen dieser Arbeit in solchen Fällen als zu starr, wenn $\mathrm{Re}\,k$ bzw. η am selben Randpunkt über längere Distanzen zu annähernd 0 bestimmt werden muß, z.B. bei der Simulation eines Feldes in Modenform oder eines Gauß'schen Strahles in Ausbreitungsrichtung. Der Faktor $\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k\Delta x}$ ergibt sich gleichbleibend aus den jeweils äußersten Feldwerten, der dann feste Betrag des Faktors kann das Feld am Rand unpassend wölben. Die Folge waren schlecht wirkende Randbedingungen, gelegentlich ein Aufschaukeln am Rand, ein instabiles Verhalten des gesamten Ausbreitungsalgorithmus. Zur Abhilfe bietet sich an, die Punkte für die Berechnung neuer $\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k\Delta x}$–Faktoren um eine bestimmte Indexzahl $\Delta\eta$ ins Innere des Rechenfensters zu verschieben:

$$\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k^{r+1}\Delta x} = \frac{F^r_{M-\eta-\Delta\eta}}{F^r_{M-\eta-1\Delta\eta}} \quad \text{für} \quad \eta \leq 1,$$

$$\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k^{r+1}\Delta x} = \eta \frac{F^r_{M-1-\Delta\eta}}{F^r_{M-2-\Delta\eta}} + (1-\eta)\frac{F^r_{M-\Delta\eta}}{F^r_{M-1-\Delta\eta}} \quad \text{für} \quad \eta > 1.$$

$\Delta\eta = 1$ entspricht in den kritischen Fällen $\mathrm{Re}\,k^r \approx 0$, $\eta \approx 0$ gerade den STBC aus [10], damit ergaben sich die plausiblen Resultate der Kapitel 4 und 5.

Auch nach dieser Änderung traten in bestimmten Fällen Instabilitäten am Rand mit den oben geschilderten Symptomen auf. Sie verschwinden, wenn man den Randbedingungsansatz (87) auf reelle k–Werte beschränkt, die Faktoren $\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k\Delta x}$ vor der Anwendung als Randbedingung (88) durch ihren Betrag teilt. Der Ansatz berücksichtigt dann lediglich die Phasen–, nicht die Amplitudenänderung des Feldes in Transversalrichtung am Rand. Das vermindert etwas die Transparenz der Ränder, führte aber zu ausnahmslos stabilen Ausbreitungsrechnungen.

3.4.2 Genähert transparente Randbedingungen

Der im letzten Abschnitt vorgestellte TBC–Algorithmus verwendet in jedem Ausbreitungsschritt wechselnde Matrizen, macht demnach jedesmal eine erneute LR–Zerlegung notwendig. Wünschenswert ist ein

Verfahren, das auch für die Randpunkte gleichbleibende Differenzenschemata zur Verfügung stellt. Nach den Erfahrungen in [11] wird man damit allein eine ausreichende Funktion der Randbedingungen nicht erwarten können, ggfs. bedarf es weiterer Korrekturen der Feldwerte an den Randpunkten. Andererseits werden nach [1] feste, von gewissen Optimierungsparametern abhängige Differenzenschemata an den Rechenfensterrändern offenbar erfolgreich angewandt.

Zur Herleitung eines solchen Verfahrens soll zunächst ein innerer Punkt mit Indizes (a, b) nicht auf einer Grenzfläche in einem nicht magnetisierten Materialbereich Gegenstand der Betrachtung sein. Das gesuchte Differenzenschema muß dort die Ableitung in Ausbreitungsrichtung zu jeder skalierten Feldkomponente $f = u, v, w$ mit den Feldwerten am Punkt (a, b) und geeignet vielen Nachbarpunkten verknüpfen. Ein möglicher Ansatz läßt sich in der Form

$$(\partial_s f)_{a,b} = \sum_{j=1}^{J} c_j f_{a+a_j,b+b_j} \tag{90}$$

schreiben. Die J komplexen Koeffizienten c_j sind vorerst unbekannt.

Wählt man nun eine Anzahl geeigneter Felder f^l, die die Gleichung (90) später näherungsweise lösen sollen, und zugehörige Gewichte g_l, dann kann der Fehler

$$E(c_1, \ldots, c_J) = \sum_l g_l^2 \left| (\partial_s f^l)_{a,b} - \sum_{j=1}^{J} c_j f^l_{a+a_j,b+b_j} \right|^2$$

ein Maß für die Güte des durch die c_j bei einer gegebenen Form (J, a_j, b_j) festgelegten Differenzenschemas sein. Die notwendige Bedingung für ein Minimum

$$\frac{\partial E}{\partial \mathrm{Re}\, c_j} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial \mathrm{Im}\, c_j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, J$$

führt auf ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten c_j:

$$\sum_{k=1}^{J} L_{jk} c_k - R_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, J \tag{91}$$

mit

$$L_{jk} = \sum_l g_l^2 (f^l_{a+a_j,b+b_j})^* f^l_{a+a_k,b+b_k}, \qquad R_j = \sum_l g_l^2 (f^l_{a+a_j,b+b_j})^* (\partial_s f^l)_{a,b}.$$

L_{jk} und R_j sind im Allgemeinen vom Ort (a, b) abhängig.

Diese Abhängigkeit verschwindet, wenn man als Referenzfelder gerade ebene Wellen wählt, zweckmäßig mit zwei Summationen zur Gewichtung:

$$H_*^{lm}(x, y, z) = H_0\, \mathbf{e}^{-\mathrm{i}k_0 n(\cos\theta_l z + \sin\theta_l \cos\varphi_m x + \sin\theta_l \sin\varphi_m y)}. \tag{92}$$

Dazu gehören skalierte Modulationsfelder

$$f_*^{lm}(p, q, s) = \mathbf{e}^{\mathrm{i}((n_r - n\cos\theta_l)s - n\sin\theta_l \cos\varphi_m p - n\sin\theta_l \sin\varphi_m q)}. \tag{93}$$

Die Gewichte g_{lm} konzentrieren dann den Fehler E auf Beiträge aus Wellenvektoren nahe der Ausbreitungsrichtung:

$$\theta_l = \frac{l}{N_\theta}\theta_{max}, \quad l = 0, \ldots, N_\theta; \qquad \varphi_m = \varphi_{min} + \frac{m}{N_\varphi}(\varphi_{max} - \varphi_{min}), \quad m = 0, \ldots, N_\varphi;$$

$$g_{lm} = \mathbf{e}^{-\dfrac{(\theta_l - \theta_{opt})^2}{\theta_w^2}}$$

mit geeigneten Winkeln φ_{min}, φ_{max}, θ_{max}, θ_w, θ_{opt}.

Mit Hilfe der Felder (93) ist es nun möglich, die Koeffizienten des Diskretisierungsschemas zur folgenden Gleichung zu reproduzieren:

$$\partial_s f = \mathrm{i}(n_r - n)f - \frac{\mathrm{i}}{2n}\left(\partial^2_{p^2} + \partial^2_{q^2}\right) f. \tag{94}$$

Plausibel, denn die Funktionen H_*^{lm} lösen die Differentialgleichung

$$\mathbf{\Delta} H + k_0^2 n^2 H = 0,$$

die nach paraxialer Näherung (vgl. (14) – (16)) die Form

$$\partial_z H = -\mathrm{i}k_0 n H - \frac{\mathrm{i}}{2k_0 n}\left(\partial^2_{x^2} + \partial^2_{y^2}\right) H$$

erhält. Nach Abspaltung einer Modulation (18) und Skalierung entsteht daraus (94).

Nun basieren die Ausbreitungsrechnungen aber auf den Fresnel–Gleichungen (23) – (25), hier in der Gestalt

$$\partial_s f = \mathrm{i}\frac{n_r^2 - n^2}{2n_r} f - \frac{\mathrm{i}}{2n_r}\left(\partial^2_{p^2} + \partial^2_{q^2}\right) f. \tag{95}$$

Dafür geeignete Referenzfelder ergeben sich aus (93) mit dem Ansatz

$$f^{lm}(p, q, s) = \mathbf{e}^{\mathrm{i}\left(\left(\dfrac{n_r}{2} - \dfrac{n^2}{2n_r}\cos\theta_l\right) s - n'\sin\theta_l\cos\varphi_m p - n'\sin\theta_l\sin\varphi_m q\right)}. \tag{96}$$

n' bleibt so zu bestimmen, daß die Felder (96) für $\theta_l \to 0$ gerade die Gleichung (95) lösen, analog zu (93) und (94). Das ist wie dort bis zur dritten Ordnung in θ_l möglich, wenn man $n' = n/\sqrt{2}$ wählt.

In Verbindung mit einem geeigneten Differenzenschema

$$J = 5, \quad (a_1, \ldots, a_5) = (0, 1, -1, 0, 0), \quad (b_1, \ldots, b_5) = (0, 0, 0, 1, -1)$$

gestatten es dann diese Felder, über das Gleichungssystem (91) die exakten Koeffizienten

$$c_1' = \mathrm{i}\left(\frac{n_r^2 - n^2}{2n_r} + \frac{1}{n_r}\left(\frac{1}{\Delta p^2} + \frac{1}{\Delta q^2}\right)\right),$$

$$c_2' = c_3' = \frac{-\mathrm{i}}{2n_r\Delta p^2}, \qquad c_4' = c_5' = \frac{-\mathrm{i}}{2n_r\Delta q^2}$$

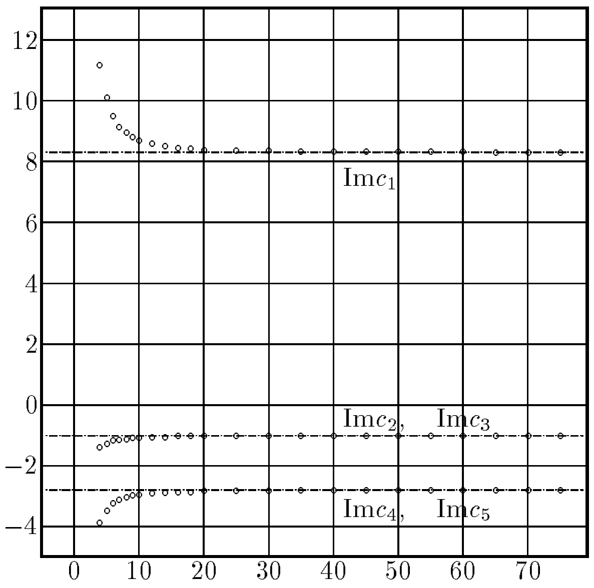


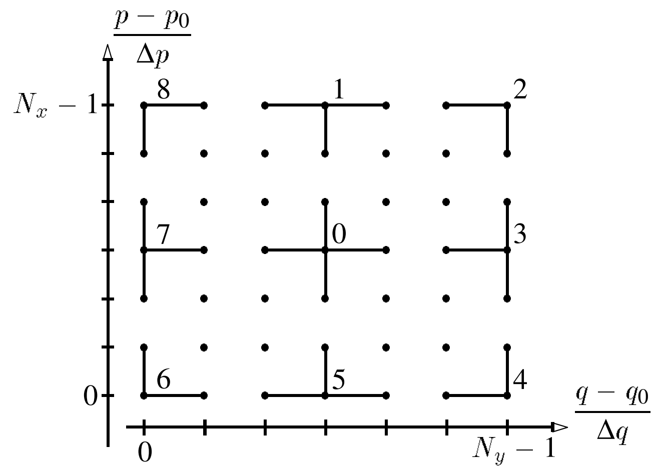
Abb. 4: Senkrecht: Imaginärteile der Koeffizienten $c_1, \dots, c_5$; waagerecht: π/θ_{opt}; die Linien zeigen die Niveaus der exakten Werte. Die Beträge der Realteile der berechneten Koeffizienten waren sämtlichst kleiner 10^{-14}.

des Diskretisierungsschemas (siehe (3.1)) zur Fresnel–Gleichung (95) anzunähern.

Abb. 4 zeigt dazu das Konvergenzverhalten der Imaginärteile zu $c_1, \dots, c_5$ bei abnehmendem θ_{opt} zum Parametersatz $n_r = 2$, $n = 1$, $\Delta p = 0.3$, $\Delta q = 0.5$, $\theta_{max} = \pi/4$, $N_\theta = 100$, $\varphi_{min} = 0$, $\varphi_{max} = 2\pi$, $N_\varphi = 80$, $\theta_w = \pi/60$.

Zur Darstellung einer einzelnen ebenen Welle mit Wellenvektor in Ausbreitungsrichtung mit dem Differenzenschema (90) sind Feldwerte an benachbarten Punkten nicht notwendig, entsprechend verschwindet mit $\theta_{opt} \to 0$ die Determinante der Matrix L_{jk} in (91). Nach den Erfahrungen in (4.1) führt die Näherung mit $\theta_{opt} > 0$ dennoch zu ausreichend guten Koeffizienten.

In gleicher Weise lassen sich nun an den Randpunkten die gesuchten Differenzenschemata nur für tatsächlich vorhandene Nachbarpunkte erzeugen. Dazu wählt man je nach Lage des Randpunktes im Rechenfenster geeignete Schemaformen (J, a_j, b_j; siehe auch die Tabelle unten):



Die Nummern an den Punkten geben den Typ des Randpunktes an, 0 bezeichne einen inneren Punkt. Verbundene Punkte gehören zum Schema gleichen Typs.

Nach den Betrachtungen aus (3.4.1) müssen die Randbedingungen möglichst gut Felder mit einer Abhängigkeit wie (87) nachbilden. In diesem Sinne beschränkt man die Referenzfelder (96) mit Hilfe der Parameter φ_{min}, φ_{max} auf solche Wellen, deren Wellenvektoren keine ins Innere des Rechenfensters gerichtete Komponente besitzen, je nach Punkttyp unterschiedlich gemäß der folgenden Tabelle:

Typ	J	a_1, b_1	a_2, b_2	a_3, b_3	a_4, b_4	φ_{min}	φ_{max}
1	4	0,0	0,1	0,-1	-1,0	$-\pi/2$	$\pi/2$
2	3	0,0	0,-1	-1,0		0	$\pi/2$
3	4	0,0	1,0	-1,0	0,-1	0	π
4	3	0,0	0,-1	1,0		$\pi/2$	π
5	4	0,0	0,1	0,-1	1,0	$\pi/2$	$3\pi/2$
6	3	0,0	1,0	0,1		π	$3\pi/2$
7	4	0,0	1,0	-1,0	0,1	π	2π
8	3	0,0	-1,0	0,1		$3\pi/2$	2π

Obige Betrachtungen lassen sich sinngemäß auf den Fall eines eindimensionalen transversalen Rechenfensters übertragen. Die Schemata (90) verknüpfen dann lediglich an beiden Enden des Rechenfensters die Randpunkte mit ihrem Nachbarpunkt. Bei den Referenzfeldern entfällt der zweite Index, φ bekommt den Wert 0 und θ_{max} ein Vorzeichen je nach Lage des Randpunktes.

Man erhält schließlich die gesuchten Diskretisierungsschemata, nachdem für jeden am Rand auftretenden Brechungsindex und jeden darauf vorkommenden Randpunkttyp einmal das Gleichungssystem (91) gelöst wurde. Gelegentlich treten in den simulierten Strukturen Randpunkte auf, die Permittivitätssprüngen benachbart sind. Es erweist sich als ausreichend, die obigen Schemata auch dort unverändert anzuwenden. Noch zu testen bleibt, ob und wie gut diese Randbedingungen nach der Optimierung der restlichen Parameter θ_{opt}, θ_w, θ_{max} transparent sind (4.1).

Dort zeigt sich, daß sich die reflektierende Wirkung nahezu bis auf diejenige der TBC reduziert, wenn man nach jedem Ausbreitungsschritt eine Korrektur der äußersten Feldwerte wie (89) hinzufügt. Das gesamte Verfahren zur Bestimmung der Exponentialfaktoren muß dabei separat auf die Enden der einzelnen Zeilen und Spalten des Rechenfensters angewendet werden, an den Eckpunkten entlang der Winkelhalbierenden der Rechenfensterseiten. Die Anmerkungen am Ende des Abschnitts (3.4.1) gelten sinngemäß.

Im folgenden Teil der Arbeit soll das Kürzel ATBC* für „approximate transparent boundary conditions“ die hier vorgestellten Randbedingungen, ATBC den Algorithmus mit nachfolgender Korrektur bezeichnen.

3.5 Feldanalysen

Die Diskretisierungen der Abschnitte (3.1) und (3.2) gehen in die Formeln bzw. Verfahren zur Auswertung der berechneten Felder ebenfalls ein.

3.5.1 Feldstärke, –Energie

Geeignete Differenzenquotienten ersetzen die Ableitungen in den Formeln (43), (44) zur Energiedichte und Intensität. Wegen der longitudinalen Ableitungen erhält man ein Gitter aus Energiedichtewerten $\sigma_{a,b}^{r+\frac{1}{2}}$ und Intensitätswerten $(S_z)_{a,b}^{r+\frac{1}{2}}$, $(S_z^x)_{a,b}^{r+\frac{1}{2}}$, $(S_z^y)_{a,b}^{r+\frac{1}{2}}$ in der Mitte der Ausbreitungsabschnitte. Jedem Querschnitt r bzw. der entsprechenden Distanz z lassen sich dann beispielsweise zuordnen:

- Feldstärkeprofile: $|u_{a,b}^r|^2$, $|v_{a,b}^r|^2$, $|w_{a,b}^r|^2$ bzw. die entsprechenden Beträge sowie Real– und Imaginärteile der Komponenten zur Modenauswertung nach (2.8.2),

- die Feldenergie

$$W^r = \sum_{a,b} \sigma_{a,b}^{r+\frac{1}{2}} \Big/ \sum_{a,b} \sigma_{a,b}^{\frac{1}{2}}$$

  auf dem Rechenfenster oder einem Teil der Struktur, je nach Summationsbereich,

- der Strahlungsfluß in Ausbreitungsrichtung oder die Strahlungsleistung

$$P^r = \sum_{a,b} (S_z)_{a,b}^{r+\frac{1}{2}} \Big/ \sum_{a,b} (S_z)_{a,b}^{\frac{1}{2}}$$

  auf dem Rechenfenster oder einem Teil davon,

- die transversalen Anteile zur Strahlungsleistung

$$X^r = \sum_{a,b} (S_z^x)_{a,b}^{r+\frac{1}{2}} \Big/ \sum_{a,b} (S_z)_{a,b}^{\frac{1}{2}}, \qquad Y^r = \sum_{a,b} (S_z^y)_{a,b}^{r+\frac{1}{2}} \Big/ \sum_{a,b} (S_z)_{a,b}^{\frac{1}{2}}.$$

So definiert sind W, P, X und Y dimensionslos, entsprechende Ergebnisse im folgenden Teil der Arbeit meinen immer diese Quotienten. Bei einer Leistung auf einem Wellenleiterteil erstreckt sich der Summationsbereich zur Normierung im Nenner ohne anderslautende Angaben über das gesamte Rechenfenster.

Wegen der paraxialen Näherung und den meistens als Initialisierung verwendeten Gauß'schen Strahlen ist bei derart bestimmten Leistungskurven eine gewisse Vorsicht geboten (vgl. (4.5), (5.2)), jedenfalls während der Abstrahlungsphase zu Beginn einer Ausbreitungsrechnung. Die asymptotischen Werte nach Beendigung der Abstrahlung dagegen werden nach (4.3) offenbar korrekt wiedergegeben.

3.5.2 Moden

Zur Analyse nach Ausbreitungskonstanten dient die diskretisierte Korrelationsfunktion

$$L^r = \sum_{a,b} \left((u_{a,b}^0)^* u_{a,b}^r + (v_{a,b}^0)^* v_{a,b}^r + (w_{a,b}^0)^* w_{a,b}^r \right).$$

N_m an den Punkten $s_r = r\Delta s$, $r = 0, \ldots, N_m - 1$ gegebene Werte L^r legen die diskrete Form der Fouriertransformierten l zu L an den Frequenzpunkten $a\Delta k_s$, $\quad a = -N_m/2, \ldots, 0, N_m/2, \quad \Delta k_s = 2\pi/(N_m \Delta s)$ fest:

$$l^a = \sum_{r=0}^{N_m-1} L^r \, \mathbf{e}^{-\mathrm{i}(a\Delta k_s r \Delta s)} \Delta s.$$

Aus einer Ausbreitungsrechnung mit N_m Schritten der Distanz $\Delta s = k_0 \Delta z$ kann man demnach mögliche Ausbreitungskonstanten im Intervall $[k_0 n_r - \pi/\Delta z, k_0 n_r + \pi/\Delta z]$ mit einer Auflösung $2\pi/(N_m \Delta z)$ ermitteln. Der dazu in dieser Arbeit angewandte FFT–Algorithmus stammt aus [20].

Nach (57) sollte die Fouriertransformierte der Korrelationsfunktion eine Summe von Delta–Funktionen sein, an den Stellen der beteiligten Ausbreitungskonstanten sollten sich scharfe Peaks befinden. Das ist auch der Fall, insbesondere bei den dreidimensionalen Rechnungen tritt daneben aber meistens eine Vielzahl von weiteren Spitzen mit kleinerem Betrag auf. Möglicherweise gehören diese zu Fourierkomponenten, deren Abstrahlung zu Beginn der Modenanalyse noch nicht ausreichend beendet war. Die Ursache könnte außerdem im falschen Skalarprodukt liegen, das zur Berechnung der Korrelationfunktion verwendet wurde (siehe (2.8.2), (56)).

Die exponentielle z–Abhängigkeit des Modenfeldes (48) ändert sich durch eine Normierung nicht. Folglich bleiben die Ausbreitungskonstanten erhalten, wenn man das Feld nach jedem Schritt gemäß

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}^r_{a,b} := \left(\sum_{a,b} (|u^r_{a,b}|^2 + |v^r_{a,b}|^2 + |w^r_{a,b}|^2) \right)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}^r_{a,b}$$

normiert. Das ermöglicht die Verwendung größerer Schrittweiten Δz, die sonst zu einem starken Leistungsverlust der berechneten Felder bei Schemaparametern $\alpha > \frac{1}{2}$ und nicht optimal gewähltem n_r führen würden, und reduziert etwas die für eine geforderte Auflösung notwendigen Schrittzahlen (nach [2] hängt der Fehler der ermittelten Ausbreitungskonstanten vergleichsweise wenig von Δz ab). Bei mehrmodigen Wellenleitern ist dann jedoch nicht unbedingt klar, zu welcher der über das Anfangsfeld angeregten Moden das Feld während der Ausbreitung konvergiert. Einfluß auf die Eigenwerte der Ausbreitungsmatrizen (vgl. (2.8.2)) haben beispielsweise die Lagen der Rechenfensterränder bei verschieden weit ausgedehnten Moden, die Funktion der Randbedingungen darauf oder die Differenz zwischen Referenzbrechungsindex und den Ausbreitungskonstanten.

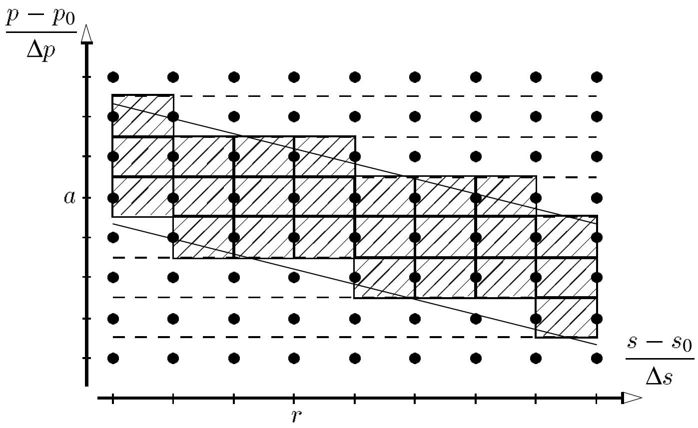
Jede Ausbreitungsrechnung zur Modenanalyse in dieser Arbeit besteht demnach aus zwei Teilen: In einem ersten wird eine geeignete Feldinitialisierung mit kürzeren Schrittweiten Δz_i in N_i Schritten solange ausgebreitet, bis der Abstrahlvorgang beendet ist. Im zweiten Teil ermittelt man in größeren Abständen Δz_m aus dem Endfeld des ersten Teiles die N_m Werte der Korrelationsfunktion, dabei wird das Feld nach jedem Schritt wie angegeben normiert.

Mit Hilfe eines Anfangsfeldes passender Symmetrie und Polarisation läßt sich häufig eine einzelne Mode auswählen. Dann wächst nach [15] und eigenen Beobachtungen der Fehler in der über (58) ermittelten Ausbreitungskonstanten β mit der Differenz $|\beta/k_0 - n_r|$. Bei Gleichheit verschwindet die z–Ableitung des Modenfeldes. Eine erneute Rechnung mit besser angepaßtem n_r liefert im allgemeinen eine weniger fehlerhafte Ausbreitungskonstante, ggfs. läßt sich dieser Vorgang auch weiter iterieren.

Der Fehler eines so bestimmten Wertes hängt kaum noch von der longitudialen, stärker von den transversalen Schrittweiten ab. Er kann also in den zweidimensionalen Rechnungen fast beliebig reduziert werden, ist aber im dreidimensionalen Fall durch die verfügbaren Ressourcen an Rechenzeit und Speicherplatz begrenzt, und zwar in der Nähe der sehr geringen Toleranzen, die für Simulationen zu magnetooptischen Filmen bei realistischen Werten der Außerdiagonalelemente notwendig sind.

3.6 Längsinhomogene Strukturen

Nach den transversalen und longitudinalen Diskretisierungen lassen sich nun die Andeutungen aus (2.5) konkretisieren. Dazu denkt man sich die Wellenleiterstruktur als entsprechend dem Verlauf der Permittivitätsgrenzen gelagerte Anordnung von Flächen bzw. Linien im zwei– bzw. dreidimensionalen Stützpunktgitter. Die Grenzflächen oder Linien schließen mit der z–Achse nur kleine Winkel ein, sie verlaufen meistens innerhalb der aus den Stützpunkten gebildeten Quader. Solange wird der Wellenleiter als längshomogen betrachtet, das Feld entsprechend weitergerechnet. Gelegentlich quert eine exakte Permittivitätsgrenze einen oder mehrere Punkte, dann ändert man dort die Permittivitätswerte und setzt das Feld im neuen, wieder als längshomogen betrachteten Abschnitt fort. Das läßt sich im planaren Fall anhand einer Skizze verdeutlichen:

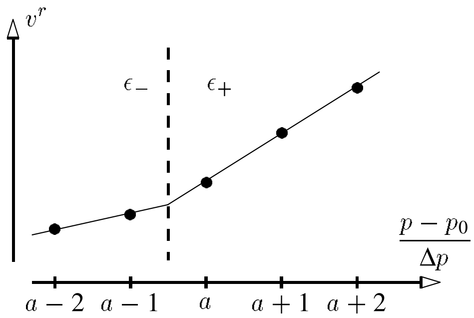


Darin kennzeichnen die schraffierten Bereiche die der Ausbreitungsrechnung zugrundeliegenden Permittivitätsgrenzen, die schrägen Linien den exakten, durch die Treppenfuktion zwischen schraffierten und nicht schraffierten Bereichen genäherten Verlauf. Üblicherweise umfaßt jeder so gebildete Abschnitt mit konstanter Permittivität viele Schrittweiten Δs.

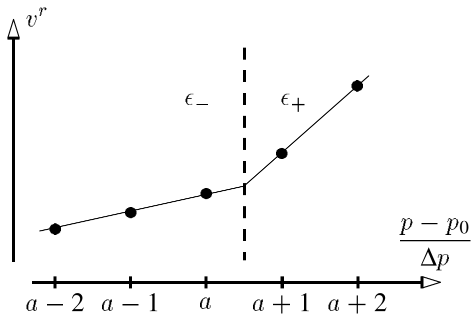
Bei Rechnungen an planaren, leicht gegen die Ausbreitungsrichtung verkippten Schichtwellenleitern (4.5) führt dieses Vorgehen zu nur wenig zufriedenstellenden Resultaten, wenn man den Verlauf der Leistung auf dem Rechenfenster beobachtet. Geringfügige Verbesserungen ergaben sich aus den folgenden Maßnahmen:

- Bei genügend kleiner Schrittweite Δs findet in den ersten Schritten nach der Umsetzung des Feldes auf neue Permittivitäten keine oder nur vernachlässigbar wenig Abstrahlung statt, der mit den alten Permittivitäten berechnete Strahlungsfluß unmittelbar vor einer Abschnittsgrenze muß mit dem eine oder wenige (N_R) Schrittweiten dahinter ermittelten übereinstimmen. Das an die geänderte Permittivität angepaßte Feld am Ende der Strecke $N_R \Delta s$ hinter der Grenze wird auf die Gesamtleistung davor normiert. Eine sinnvolle Distanz hängt vom Winkel der Permittivitätsgrenzen mit der Ausbreitungsrichtung ab, ggfs. reicht bereits $N_R = 0$.

- Durch Änderung einzelner Feldwerte in der Nähe der versetzten Permittivitätsgrenzen läßt sich möglicherweise eine bessere Anpassung des Feldes an die Stetigkeitsbedingungen zur neuen Grenzlage erreichen. Das bedeutet im planaren, nicht magnetooptischen Fall:



Feld am Ende der Berechnung zu einem Abschnitt mit Permittivitätsgrenze zwischen den Punkten a und $a-1$.



Anfangsfeld für den neuen Abschnitt mit der Grenze zwischen den Punkten a und $a+1$.

Der Index a soll den Punkt unterhalb der verschobenen Permittivitätsgrenze bezeichnen, dort muß v die Bedingung $\frac{1}{\epsilon_-}(\partial_p v)^-_{a+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\epsilon_+}(\partial_p v)^+_{a+\frac{1}{2}}$ erfüllen und selbst stetig sein:

$$\frac{1}{\epsilon_-}\frac{v^r_a - v^r_{a-1}}{\Delta p} = \frac{1}{\epsilon_+}\frac{v^r_{a+2} - v^r_{a+1}}{\Delta p}, \tag{97}$$

$$v^r_{a-1} + \frac{v^r_a - v^r_{a-1}}{\Delta p}\frac{3}{2}\Delta p = v^r_{a+2} - \frac{v^r_{a+2} - v^r_{a+1}}{\Delta p}\frac{3}{2}\Delta p. \tag{98}$$

Daraus ergeben sich die Vorschriften zur Änderung der Feldwerte v^r_a und v^r_{a+1}:

$$v^r_{a+1} = \frac{\epsilon_- + \epsilon_+/3}{\epsilon_- + \epsilon_+}v^r_{a+2} + \frac{2}{3}\frac{\epsilon_+}{\epsilon_- + \epsilon_+}v^r_{a-1}, \tag{99}$$

$$v^r_a = \frac{2}{3}\frac{\epsilon_-}{\epsilon_- + \epsilon_+}v^r_{a+2} + \frac{\epsilon_+ + \epsilon_-/3}{\epsilon_- + \epsilon_+}v^r_{a-1}. \tag{100}$$

Schon wegen der falschen Approximationsordnung der Ableitungen in den Ansätzen (97), (98) ist fraglich, ob diese Entspannung des Feldes hinter einer Abschnittsgrenze tatsächlich zu realistischeren Berechnungsergebnissen führt. Nach (4.5) scheint das für die dort betrachteten Wellenleiter wenigstens dann der Fall zu sein, wenn man die Relaxationsvorschriften (99), (100) zusammen mit der vorher genannten Feldnormierung anwendet.

Derartige Eingriffe erübrigen sich, wenn man die Schrittweiten genügend klein wählt (und wählen kann) und sich auf Strukturen mit weniger großen Brechzahlsprüngen beschränkt.

4 Zweidimensionale Ausbreitungsrechnungen

Nachdem die letzten Kapitel alle benötigten Methoden bereitgestellt haben, bleiben nun die eigentlichen numerischen Rechnungen zu dokumentieren. Das Rechenfenster hat zunächst nur eine transversale Dimension mit der Koordinaten x. Ortsangaben lauten wieder in Meterbruchteilen anstelle reziproker Wellenzahlen, die Diskretisierung aus Kapitel 3 überträgt sich.

4.1 Im freien Raum

Die ersten Rechnungen dienen zur Charakterisierung der ATBC–Randbedingungen. Wie in [11] bietet sich an, die Wirkung des Rechenfensterrandes auf einen Gauß'schen Strahl zu testen, der in einem Medium mit konstantem Brechungsindex n in kleinen Winkeln gegen den Rand läuft. Nach ausreichend langer Ausbreitungsstrecke sollte die auf dem Rechenfenster verbliebene Feldenergie möglichst nahe bei 0 sein, der Strahl ohne Profiländerung über die Grenzfläche treten.

Die Initialisierung

$$F(x, 0) = \mathbf{e}^{-(x - x_s)^2/r_g^2}\,\mathbf{e}^{-\mathrm{i}k_0 n_g \sin\alpha_v x} \tag{101}$$

erzeugt nach (41) einen Gauß'schen Strahl der Breite $2r_g$ mit Maximum in $x = x_s$ auf dem Startquerschnitt $z = 0$, der sich in einem Winkel α_v gegen die z–Richtung ausbreitet. F steht in diesem Abschnitt stellvertretend für eine der Komponenten des Modulationsfeldes. Nimmt man als Maß für die Strahlungsenergie auf dem Rechenfenster den Ausdruck (vgl. (47))

$$P^r = \sum_{a=0}^{N_x-1} |F_a^r|^2,$$

dann kann man zu einer durch N_z Schritte gegebenen Ausbreitungsdistanz als Reflektionsfaktor R des Rechenfensterrandes definieren:

$$R = P^{N_z}/P^0.$$

Je kleiner dieser Wert bei sonst gleichbleibenden Parametern ausfällt, umso vollständiger passiert der Strahl die Fenstergrenze.

Mit diesem Kriterium lassen sich die in (3.4.2) noch unbestimmten Größen anpassen. Entsprechende Simulationen mit einem Parametersatz in Anlehnung an [11]:

$\lambda = 0.828\,\mu$m, $n = n_r = n_g = 1.0$, Rechenfenster: $[-25\,\mu\text{m}, 25\,\mu\text{m}]$ bei 256 Diskretisierungspunkten, $\Delta x = 0.2\,\mu$m, $\Delta z = 0.2\,\mu$m, $N_z = 5000$ entsprechend $1000\,\mu$m Ausbreitungsstrecke für Strahlen mit $\alpha_v \geq 5^o$, $r_g = 10.0\,\mu$m, $x_s = 0\,\mu$m

führten zu den folgenden Beobachtungen:

- Schemaformen: Die zwei jeweils äußersten Punkte sind ausreichend, zusätzliche weiter innen liegende Punkte brachten bei sonst konstanten Parametern kaum Verbesserungen, die zugehörigen Koeffizienten in (90) waren vergleichsweise klein.

- θ_{max} geht wegen des starken Abfalls der Gewichtsfunktion bei festem N_θ nur über die Dichte der θ_l–Werte ein und hat kaum Einfluß auf den Reflektionsfaktor. Weiter verwendet wurde $N_\theta = 100$, $\theta_{max} = 30^o$.

- θ_w beeinflußt R ebenfalls nur wenig, für geeignet gewähltes θ_{opt} funktioniert ein recht kleiner Winkel am besten: $\theta_w = 2^o$.

- θ_{opt} ist der entscheidende Parameter dieser Liste. Der Wert θ_{opt} muß so festgelegt werden, daß für den gesamten paraxialen Winkelbereich zwischen 0^o und beispielsweise 12^o möglichst gerige Reflektionsfaktoren entstehen. Abb. 5 zeigt die Abhängigkeit des Reflektionsfaktors vom Strahlwinkel α_v bei fester Distanz $N_z\Delta$. Kurvenparameter ist θ_{opt}. Zum Vergleich sind die mit TBC–Randbedingungen ermittelten Werte ebenfalls eingetragen. Begonnen wurde bei $\alpha_v = 5^o$, da für kleinere Winkel die Wellenberge den Fensterrand bei der gewählten Ausbreitungsstrecke nicht ausreichend passieren. Letzteres ist auch Ursache des starken Anstiegs der Faktoren bei kleineren Strahlwinkeln. Nach diesem Diagramm scheint ein Wert $\theta_{opt} = 7.5^o$ auch für solche Winkel noch ausreichend funktionierende Randbedingungen zu erzeugen.

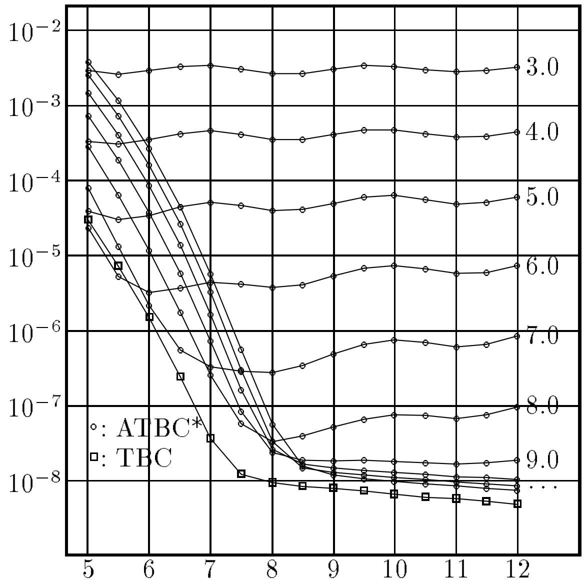


Abb. 5: Senkrecht: Reflektionsfaktoren R zu ATBC und TBC; waagerecht: Strahlwinkel α_v in ^{o}. Parameter ist θ_{opt} in ^{o}.*

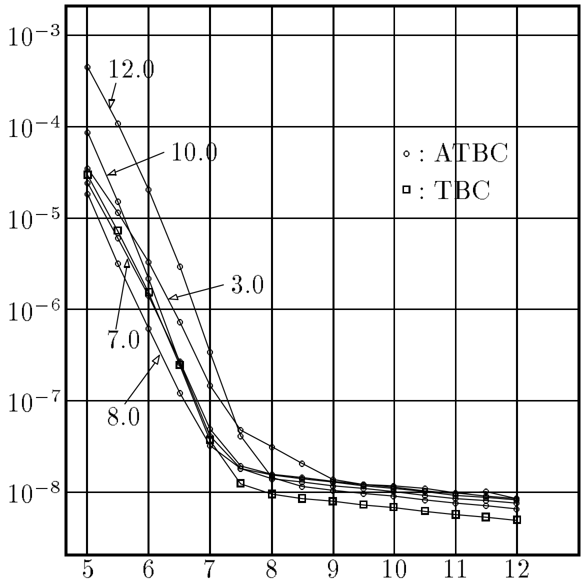


Abb. 6: Senkrecht: Reflektionsfaktoren R zu ATBC und TBC; waagerecht: Strahlwinkel α_v in ^{o}. Parameter ist θ_{opt} in ^{o}.

Dennoch liegen die Reflektionsfaktoren der ATBC* um Größenordnungen über denjenigen der TBC. Verwendet man dagegen zusätzlich die Feldkorrekturen (89) der TBC zwischen den Ausbreitungsschritten, dann verschieben sich die oben dargestellten Werte nahezu auf das TBC–Niveau. Zum Vergleich dient Abb. 6. Insbesondere verschwindet dort die starke Abhängigkeit der Reflektionsfaktoren vom Winkel θ_{opt}, die ATBC besitzen ebenfalls den adaptiven Charakter der TBC.

Oben genannte Parameter der ATBC* erwiesen sich in analogen Rechnungen auch mit den Korrekturen als passend. Die folgende Tabelle enthält einige Beispielwerte für Reflektionsfaktoren, die damit ermittelt wurden:

BC-Typ	Strahlwinkel α_v			
	5^o	7^o	9^o	12^o
ATBC*	$1.30 \cdot 10^{-4}$	$1.87 \cdot 10^{-7}$	$1.37 \cdot 10^{-7}$	$2.70 \cdot 10^{-7}$
ATBC	$2.12 \cdot 10^{-5}$	$4.38 \cdot 10^{-8}$	$1.31 \cdot 10^{-8}$	$8.31 \cdot 10^{-9}$
TBC	$2.94 \cdot 10^{-5}$	$3.65 \cdot 10^{-8}$	$7.87 \cdot 10^{-9}$	$4.88 \cdot 10^{-9}$

Reflektionsfaktoren bei verschiedenen Strahlwinkeln, $N_z \Delta z = 1000\,\mu m$

Zur zweiten Spalte der Tabelle gehören die Diagramme der Abb. 7.

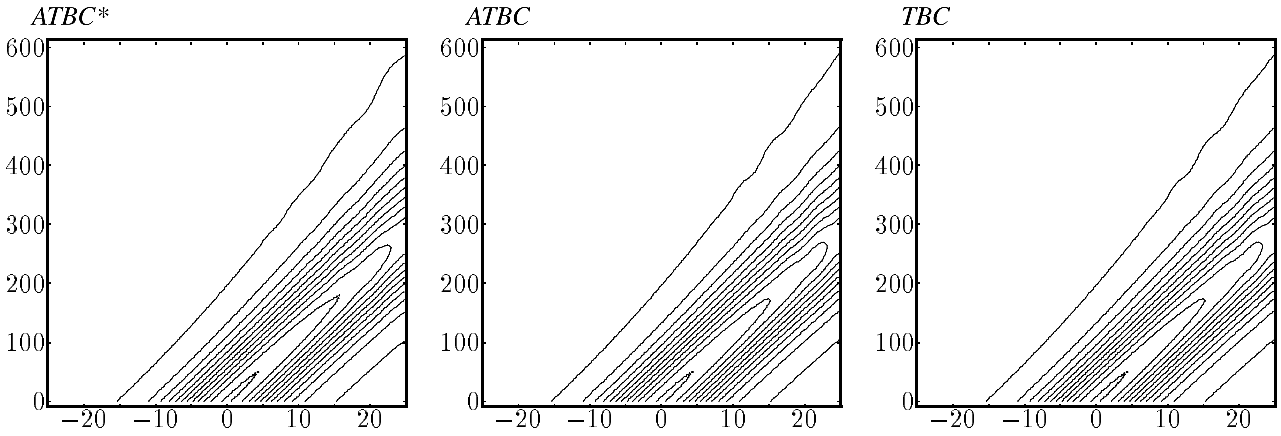


Abb. 7: Konturlinien $|F|^2$ zum Strahlwinkel $\alpha_v = 5^o$ bei verschiedenen Randbedingungstypen. Senkrecht: Ausbreitungsdistanz z in μm; waagerecht: Ort x in μm.

Ein achsenparalleler Strahl mit $\alpha_v = 0^o$ quert nicht die Rechenfenstergrenzen, zerfließt bei der Ausbreitung jedoch über die Ränder hinaus. Abb. 8 zeigt die Wirkung der Randbedingungen in dieser Testsituation.

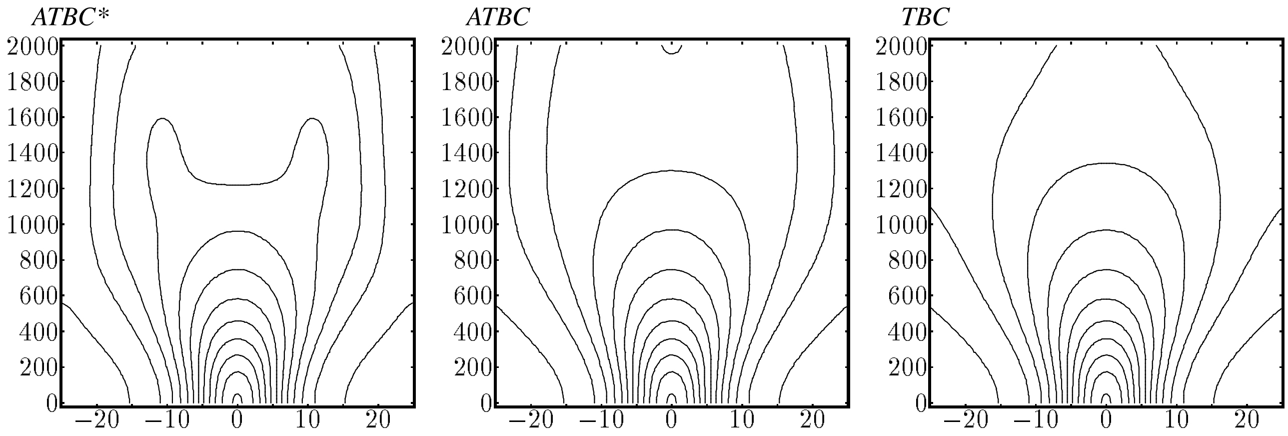


Abb. 8: Konturlinien $|F|^2$ zum Strahlwinkel $\alpha_v = 0^o$ bei verschiedenen Randbedingungstypen. Senkrecht: Ausbreitungsdistanz z in μm; waagerecht: Ort x in μm.

Die Randbedingungsalgorithmen werden später für Situationen benötigt, in denen eine führende Struktur mit gegenüber den Rechenfensterrändern erhöhter Permittivität im Inneren auftritt. Dann weichen der Referenzwert n_r von den Brechungsindizes an den Rändern und die Referenzfelder (96) von den ebenen Wellen (93) ab. Abb. 9 zeigt, daß auch bei größeren Unterschieden zwischen n und n_r und beibehaltenen Anpassungsparametern die Wirkung der neuen Randbedingungen erhalten bleibt.

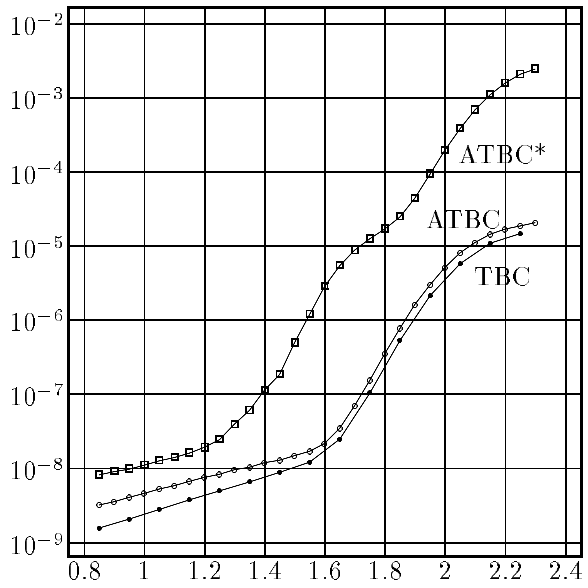


Abb. 9: Senkrecht: Reflektionsfaktoren R bei verschiedenen Randbedingungen; waagerecht: Referenzbrechungsindex n_r. Es ist $\alpha_v = 8^o$, $N_z \Delta z = 1600\,\mu m$, $n = 1.0$, $r_g = 10.0\,\mu m$.

Je größer die Differenz $|n_r - n|$, umso weniger gut bilden die Ausbreitungsgleichungen (17) die Lösungen zu (12) nach. Das verringert in den Rechnungen zu Abb. 9 den Winkel α_v der berechneten Strahlen — siehe Abb. 10 — und führt auf die höheren Reflektionsfaktoren R bei ansteigendem n_r. Mit Ausbreitungsrechnungen, die trotz großer Brechungsindexunterschiede auf der Fresnel–Gleichung beruhen, wird man deshalb die Feldenergie auf dem Rechenfenster immer etwas überschätzen. Entsprechende Bemerkungen finden sich in [9], [26].

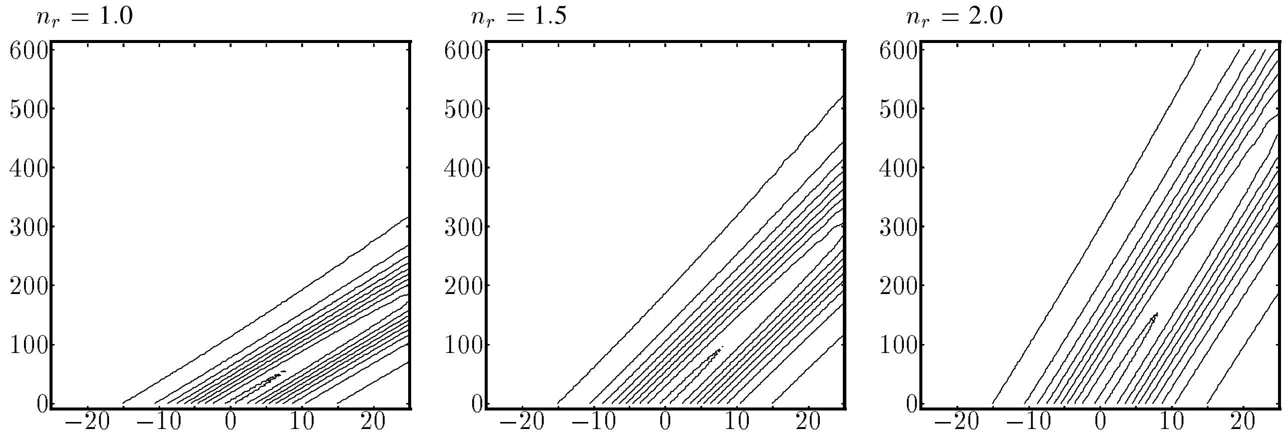


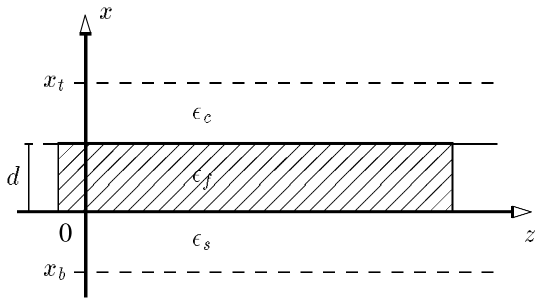
Abb. 10: Konturlinien $|F|^2$ zur Strahlwinkelvorgabe $\alpha_v = 8^o$ bei verschiedenen Werten des Referenzbrechungsindex für ein Medium mit Brechungsindex $n = 1.0$. Senkrecht: Ausbreitungsdistanz z in μm; waagerecht: Ort x in μm.

Nach obigen Vergleichen besitzen die ATBC gegenüber den TBC eine kaum geringere Leistungsfähigkeit, die Programme sind aber um ein Vielfaches schneller. Auch in den folgenden Rechnungen an zwei– und dreidimensionalen Wellenleiterstrukturen ergab sich außer dem erneuten Vergleich mit den ATBC kein Anlaß, auf die TBC zurückzugreifen.

4.2 Planare Wellenleiter

Die folgenden Abschnitte enthalten Ergebnisse zu Ausbreitungsrechnungen an den in (2.9) und (2.10) vorgestellten längshomogenen Strukturen. Wie dort beschränkt sich die Analyse auf die TM–Polarisation.

Die ersten Untersuchungen betreffen den dreischichtigen Wellenleiter aus (2.10) mit nichtmagnetischen Schichten



Geometrie 1: isotroper planarer Wellenleiter

und den Parametern $\epsilon_c = 1.0$, $\epsilon_f = 5.3$, $\epsilon_s = 3.8025$, $\lambda = 1.3\,\mu$m, $d = 0.6\,\mu$m bei einem Rechenfenster zwischen $x_b = -1.78\,\mu$m, $x_t = 1.78\,\mu$m mit $N_x = 90$ Diskretisierungspunkten, $\Delta x = 0.04\,\mu$m, $\Delta z = 0.01\,\mu$m. Nach (2.10) kann ein solcher Wellenleiter genau eine TM–polarisierte Mode mit der Ausbreitungskonstanten $\beta = 10.347\,\mu\text{m}^{-1}$ führen, das legt die Referenzpermittivität zu $\epsilon_r = 4.583$ fest. Abb. 11 (vgl. auch Abb 14) veranschaulicht die ersten $30\,\mu$m der Ausbreitung einer Gauß'schen Anregung wie (101) zu $r_g = 0.6\,\mu$m, $x_s = 0.2\,\mu$m, $\alpha_v = 0^o$ in diesem Wellenleiter, die Unstetigkeit der transversalen Feldableitung am Übergang zwischen Film und Deckschicht ($x = 0.6\,\mu$m) läßt sich erahnen.

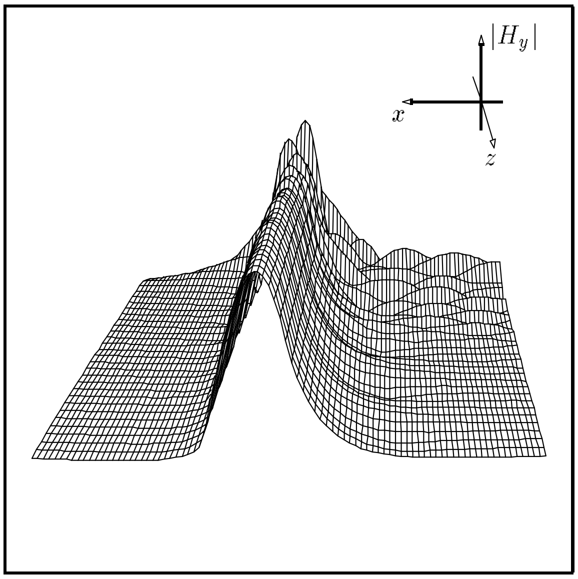


Abb. 11, zur Geometrie 1: Feldstärkebetrag $|H_y|$ über der x–z–Ebene. Dargestellt ist die Ausbreitung über eine Distanz von $30\,\mu m$ nach Gauß'scher Initialisierung.

Abb. 12 zeigt dazu die gesamte Strahlungsleistung P auf dem Rechenfenster. Energieabstrahlung findet hauptsächlich während der ersten $10\,\mu$m der Ausbreitung statt, nach $30\,\mu$m ähnelt das Feld bereits der Modenfunktion. Diese Distanzen erweisen sich auch in weiteren Rechnungen bei vergleichbaren Strukturen als typisch.

Als Test der ATBC bietet sich an, das Verhalten der Randbedingungen bei einem solchen Abstrahlvorgang mit den TBC zu vergleichen. In Abb. 12 sind bereits Leistungskurven für beide Algorithmen eingetragen, Abb. 13 zeigt die Differenz zwischen den mit ATBC und TBC berechneten Leistungen P_{ATBC}, P_{TBC}. Die maximale Abweichung von weniger als 0.1% tritt an den Orten auf, an denen auch die Abstrahlung maximal ist. Die mit TBC und ATBC berechneten Felder sind nach den Diagrammen der Abb. 14 ebenfalls fast identisch. Zu den Rechnungen gehören Programmlaufzeiten von 19.5s (ATBC) und 88.3s (TBC).

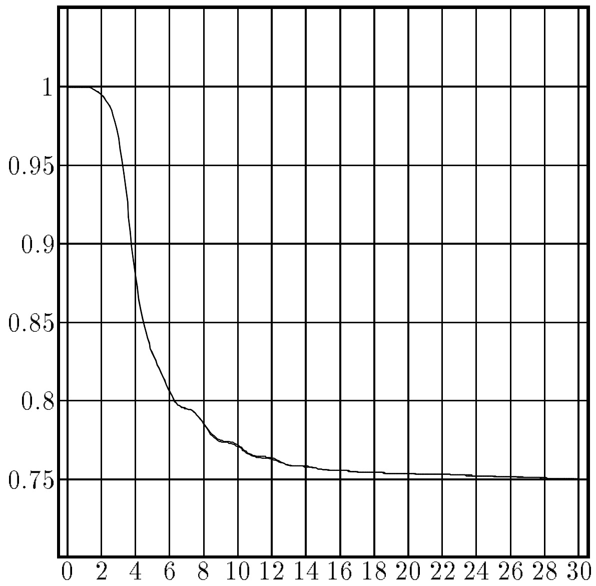


Abb. 12, zur Geometrie 1: Senkrecht: Strahlungsfluß P auf dem Rechenfenster; waagerecht: Ausbreitungsdistanz z in μm.

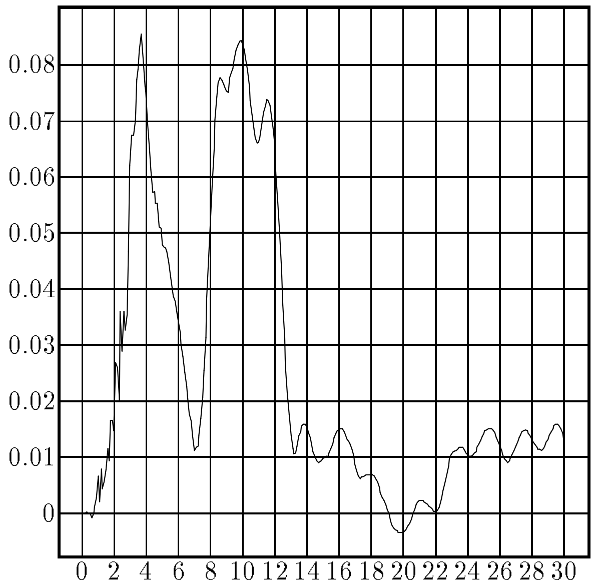


Abb. 13, zur Geometrie 1: Senkrecht: Abweichung $(P_{ATBC} - P_{TBC})/P(0)$ in %; waagerecht: Ausbreitungsdistanz z in μm.

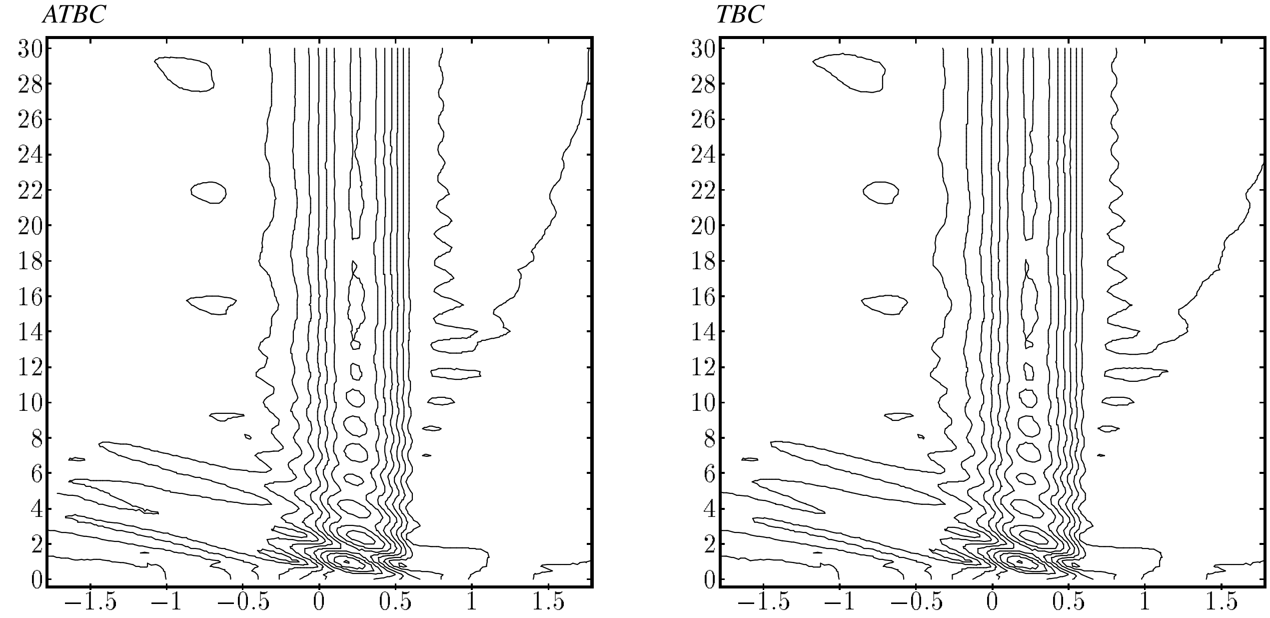


Abb. 14: Konturliniendiagramme für $|H_y|$ zur Geometrie 1 bei ATBC– bzw. TBC–Randbedingungen. Senkrecht: Ausbreitungsdistanz z in μm; waagerecht: Ort x auf dem Rechenfenster in μm.

Die Randbedingungen simulieren nichtvorhandene Fenstergrenzen. Vergrößert man bei gleicher transversaler Schrittweite das Rechenfenster, dann sollte sich das Feld auf dem ursprünglichen Ausschnitt möglichst wenig ändern. Entsprechende Rechnungen zur obigen Struktur mit einer Aufweitung des Fensters von $[-1.78\,\mu\text{m}, 1.78\,\mu\text{m}]$ auf $[-5.38\,\mu\text{m}, 5.38\,\mu\text{m}]$ oder von 90 auf 270 Diskretisierungspunkte ergaben eine maximale Abweichung von 0.4% der Leistungskurven für Distanzen zwischen 0 und 30 μm, wieder im Bereich größter Abstrahlung zwischen 4 und 12 μm.

Nach diesen Betrachtungen scheinen die ATBC auch für Wellenleiterstrukturen geeignet, alle weiteren planaren und dreidimensionalen Rechnungen verwenden diesen Randbedingungsalgorithmus.

4.3 Modenanalyse

Anhand der analytischen Ergebnisse in Kapitel 2 läßt sich überprüfen, ob die in den Ausbreitungsrechnungen ermittelten Felder die Modenprofile und Ausbreitungskonstanten der untersuchten Wellenleiter korrekt nachbilden.

Erstes Objekt ist wieder der Wellenleiter zur Geometrie 1 aus (4.2) mit den Parametern $\epsilon_s = 3.8025$, $\epsilon_f = 5.3$, $\epsilon_c = 1.0$, $\lambda = 1.3\,\mu$m, $d = 0.6\,\mu$m. Die folgenden Ausbreitungsrechnungen dazu starten mit einer Gauß'schen Initialisierung wie (101) mit $r_g = 0.6\,\mu$m, $\alpha_v = 0^o$, $x_s = 0.2\,\mu$m. Die longitudinale Diskretisierung zur Modenanalyse ist durch $\Delta z_i = 0.1\,\mu$m, $N_i = 6000$, $\Delta z_m = 2.0\,\mu$m, $N_m = 65536$ (vgl. (3.5.2)) festgelegt. Ohne andere Angaben wurden diese Werte in den Rechnungen zu diesem Abschnitt beibehalten.

Der Wellenleiter ist in TM–Polarisation einmodig mit der Ausbreitungskonstanten $\beta_{an} = 10.34718\,\mu\text{m}^{-1}$. Abb. 15 zeigt den Fehler der in Ausbreitungsrechnungen mit der feinen transversalen Diskretisierung $N_x = 594$, $x_b = -1.779\,\mu$m, $x_t = 1.779\,\mu$m, $\Delta x = 0.004\,\mu$m ermittelten Konstanten β_{BPM} in Abhängigkeit des Referenzbrechungsindex n_r. Wie erwartet ergibt sich für ein longitudinal konstantes Feld bei $n_r = \beta_{an}/k_0$ ein deutliches Minimum. Zur exakten Analyse eines Wellenleiters mit unbekannten Ausbreitungskonstanten sind demnach für jede Mode mehrere derartige Rechnungen notwendig, bei denen jeweils die folgende die Ausbreitungskonstanten der vorherigen als Referenzbrechungsindex verwendet.

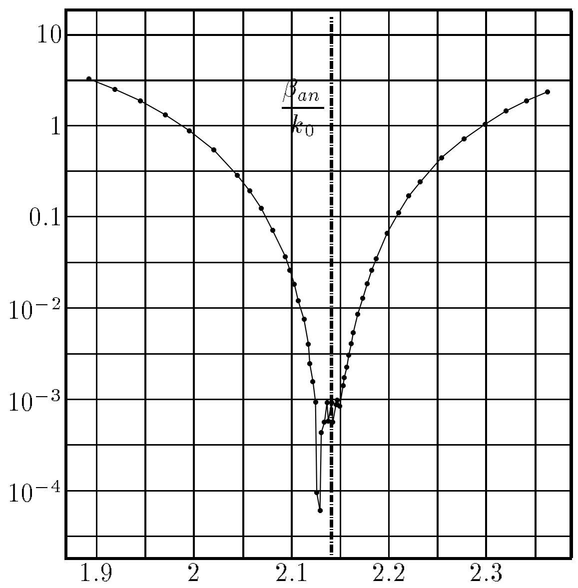


Abb. 15, zur Geometrie 1: Fehler in der Ausbreitungskonstanten in Abhängigkeit des Referenzbrechungsindex. Senkrecht: $|\beta_{BPM} - \beta_{an}|/\beta_{an}$ in %; waagerecht: n_r. Es ist $\beta_{an}/k_0 = 2.14085$.

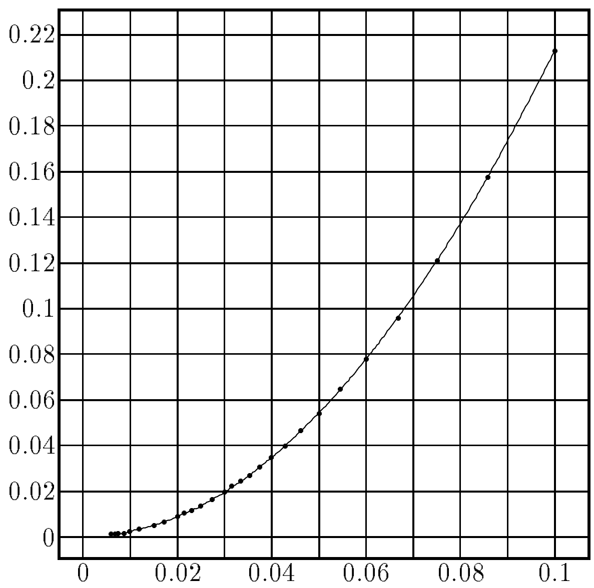


Abb. 16, zur Geometrie 1: Fehler in der Ausbreitungskonstanten in Abhängigkeit der transversalen Schrittweite. Senkrecht: $|\beta_{BPM} - \beta_{an}|/\beta_{an}$ in %; waagerecht: Schrittweite Δx in μm.

Nach [15] hängt der Fehler in der Ausbreitungskonstanten recht stark von der transversalen Schrittweite Δx ab. In Abb. 16 ist dazu der Fehler gegen die Strecke Δx aufgetragen. Zu den Werten gehören Diskretisierungen des ungefähr gleichbleibenden Rechenfensterbereiches zwischen $x_b = 1.78\,\mu$m und $x_t = 1.78\,\mu$m; $n_r = \beta_{an}/k_0$. Bei den in Kapitel 5 dargestellten dreidimensionalen Rechnungen ist die Anzahl an Diskretisierungspunkten in jeder transversalen Richtung auf 60 – 100 begrenzt; das bedeutet bei vergleichbaren

Strukturen Schrittweiten von ca. 0.05 μm. Demnach läßt sich dann ein Fehler von 0.05% in den Ausbreitungskonstanten kaum unterschreiten.

Je nach Dicke d der Filmschicht sind die Grundmoden des Wellenleiters mehr oder weniger in der führenden Schicht lokalisiert. Abb. 17 zeigt die analytischen und aus Ausbreitungsrechnungen mit festem Rechenfenster $x_b = -1.795\,\mu$m, $x_t = 1.795\,\mu$m, $N_x = 360$, $\Delta x = 0.01\,\mu$m erhaltenen Ausbreitungskonstanten als Funktion der Filmdicke d. Referenzbrechungsindex war jeweils der zur analytischen Konstanten gehörende Wert. Die größten Fehler (0.02% für die abgebildeten Werte) treten bei den am weitesten ins Substrat bzw. über den Rechenfensterrand hinaus ausgedehnten Moden in der Nähe des Cutoff auf. Betrachtet man die analytischen Modenfunktionen für diese Schichtdicke (Abb. 18), dann scheint dieser Fehler noch erstaunlich gering.

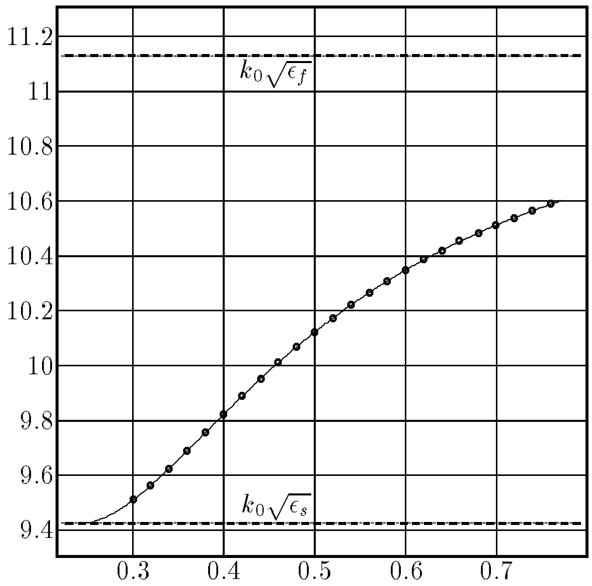


Abb. 17, zur Geometrie 1: Ausbreitungskonstanten als Funktion der Filmdicke. Senkrecht: β in μm^{-1}; waagerecht: d in μm. Die Kreise bezeichnen Konstanten aus Ausbreitungsrechnungen, die Linie analytische Werte nach (2.10).

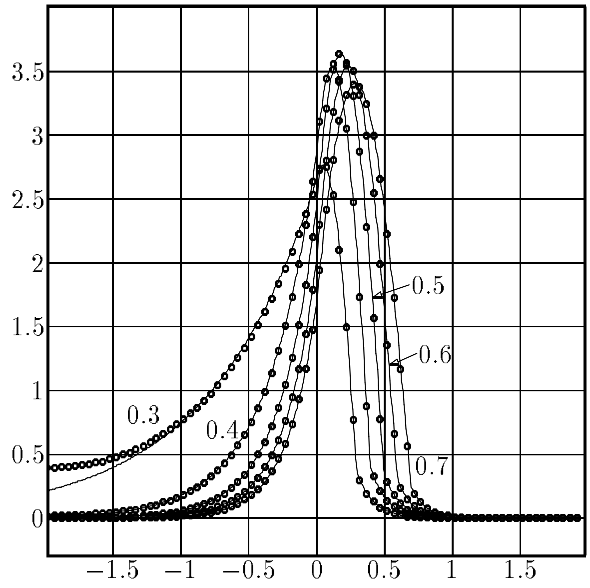


Abb. 18, zur Geometrie 1: Modenprofile bei verschiedenen Filmdicken. Senkrecht: Modenfunktion χ; waagerecht: Ort x auf dem Rechenfenster in μm. Parameter ist die Dicke der führenden Schicht d. Die Kreise bezeichnen Feldwerte aus Ausbreitungsrechnungen, die Linien den analytischen Modenverlauf. Der Abszissenbereich des Diagramms umfaßt gerade das BPM–Rechenfenster.

Nach Beendigung des Abstrahlvorganges müssen die berechneten Felder den analytischen Modenfunktionen gleichen. Die in Abb. 18 eingetragenen Punkte gehören zu Beträgen der Endfeldwerte in Rechnungen mit gröberer Diskretisierung $x_b = -1.975\,\mu$m, $x_t = 1.975\,\mu$m, $N_x = 80$, $\Delta x = 0.05\,\mu$m $\Delta z = 0.1\,\mu$m, $N_z = 5000$ und Gauß'schen Initialisierungen der Breite $r_g = 0.6\,\mu$m in Ausbreitungsrichtung mit Maximum in der jeweiligen Filmmitte. Fester Referenzbrechungsindex war $n_r = 2.1408$. Die Werte sind entsprechend dem Skalarprodukt (59) in der Form $\sum_{a=0}^{N_x-1} |v_a^{N_z}|^2 \Delta x / \epsilon_a = 1$ normiert.

Nach (2.8.2) lassen sich die Amplitudenfaktoren der Moden im ausgebreiteten Feld aus der Projektion des Anfangsfeldes auf die Modenfunktionen ermitteln. Die folgende Tabelle enthält die Beträge der Faktoren zu den Progammläufen der Abb. 18:

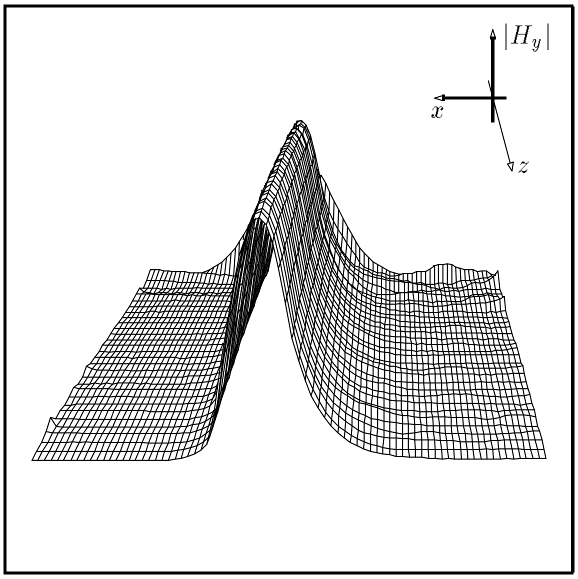
$d/\,\mu$m	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$\lvert c_{prj}\rvert$	0.5777	0.6646	0.6937	0.7273	0.7667
$\lvert c_{BPM}\rvert$	0.5730	0.6637	0.6936	0.7273	0.7666
$\lvert c_{an}\rvert$	0.5799	0.6636	0.6940	0.7257	0.7659

$|c_{prj}|$ wurde aus dem Skalarprodukt zwischen Anfangs– und Endfeld der Ausbreitungsrechnungen bestimmt, $|c_{BPM}|$ aus der entsprechenden Norm des Endfeldes, jeweils mit der durch die recht grobe Diskretisierung gegebenen Integralnäherung. $|c_{an}|$ beruht auf der analytischen Form der Moden (61) und des Anfangsfeldes (101) sowie einer feineren numerischen Integration.

Sowohl die analytischen Ausbreitungskonstanten und Modenprofile als auch die exakten Amplitudenfaktoren lassen sich mit Hilfe der BPM demnach recht gut reproduzieren; insgesamt liefern die Modenanalysen in diesen einfachen planaren Situationen zufriedenstellende Resultate.

Die nächste Generation von Randbedingungen sollte auch in einer Ausbreitungsrechnung wie oben zu $d = 0.3\,\mu$m getestet sein und dort die Modenfunktion korrekt wiedergeben. An dieser Stelle mußten die TBC–Korrekturen der Randbedingungen wie am Ende von (3.4.1) erwähnt auf den Phasenanteil beschränkt werden. Im anderen Fall waren grob falsch berechnete Leistungen die Folge, insbesondere bei einem großen nichtberücksichtigten Modenanteil jenseits der Rechenfenstergrenzen für $d = 0.3\,\mu$m. Außerdem verhält sich das Feld mit der Phasenkorrektur in einem gewissen Sinne ruhiger, wie in Abb. 19 zu sehen ist. Die Abstrahlung zu Beginn der Ausbreitung wird auch mit der eingeschränkten Korrektur offenbar exakt modelliert (siehe Tabelle), die Leistungskurven zu Abb. 19 unterscheiden sich auf den ersten μm kaum, wenn man vom gelegentlichen Aufschaukeln des Feldes bei Verwendung der TBC–Korekturen absieht. Die weiteren planaren und dreidimensionalen Rechnungen an Wellenleiterstrukturen verwenden meistens die Phasenkorrekturen.

ATBC mit TBC–Korrekturen



ATBC mit Phasenkorrekturen

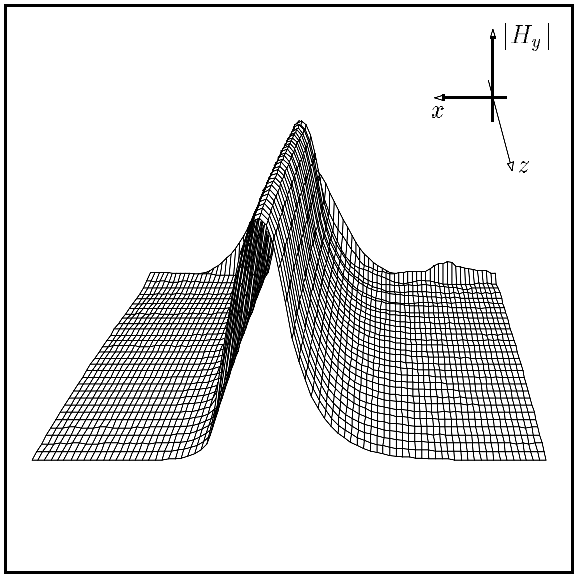
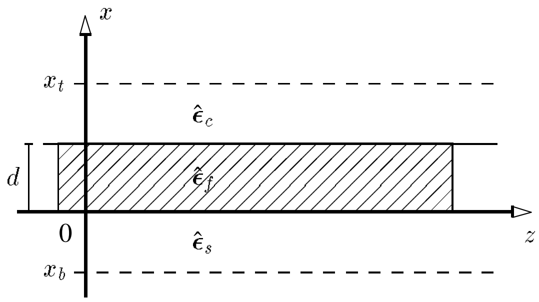


Abb. 19, zur Geometrie 1: Oberflächendiagramme zu $|H_y|$ gegen die x–z–Ebene der ersten $300\,\mu m$ Ausbreitung nach Gauß'scher Initialisierung im Wellenleiter mit $d = 0.6\,\mu m$ bei ATBC–Randbedingungen mit voller TBC–Korrektur und Phasenkorrektur. Parameter wie in den Rechnungen zu Abb. 18 .

4.4 Magnetooptische Schichten

Als erstes Objekt zum Test der BPM in einer Struktur mit anisotropen Bereichen dient der planare Wellenleiter mit einer magnetisierten Schicht aus (2.10):



Geometrie 2: planarer Wellenleiter mit magnetooptischem Film

mit den Permittivitäten $\hat{\epsilon}_c = (1.0, 0)$, $\hat{\epsilon}_f = (5.3, m_f)$, $|m_f| = 0.005$, $\hat{\epsilon}_s = (3.8025, 0)$ zur Wellenlänge $\lambda = 1.3\,\mu$m.

Unterschiedliche Vorzeichen der Außerdiagonalelemente m_f modellieren die Lichtausbreitung in den beiden der z–Achse parallelen Richtungen. Die Leistungskurven und Modenprofile ändern sich gegenüber dem Wellenleiter mit $m_f = 0$ kaum. Im Hinblick auf das in (2.9) betrachtete Isolatorkonzept interessiert aber der (ebenso kleine) Einfluß dieser Vorzeichen auf die Ausbreitungskonstante des in TM–Polarisation einmodigen Wellenleiters. Abb. 20 zeigt die Differenz der zu $m_f = +0.005$ und $m_f = -0.005$ ermittelten Konstanten β_+, β_-. Die Werte stammen aus Rechnungen mit den Diskretisierungen $N_x = 360$, $x_b = -1.795\,\mu$m, $x_t = 1.795\,\mu$m, $\Delta x = 0.01\,\mu$m, $\Delta z_i = 0.1\,\mu$m, $N_i = 6000$, $\Delta z_m = 2.0\,\mu$m, $N_m = 131072$ bei Gauß'scher Initialisierung. Referenzbrechungsindex war jeweils der zur analytischen Ausbreitungskonstanten im nichtmagnetooptischen Wellenleiter gehörende Wert.

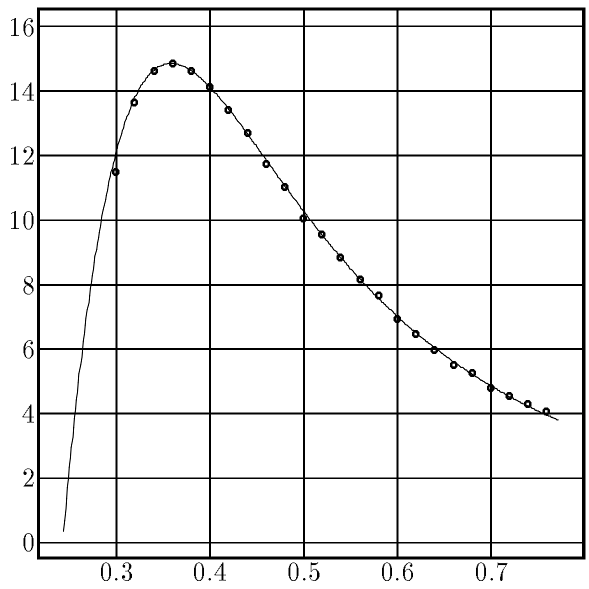
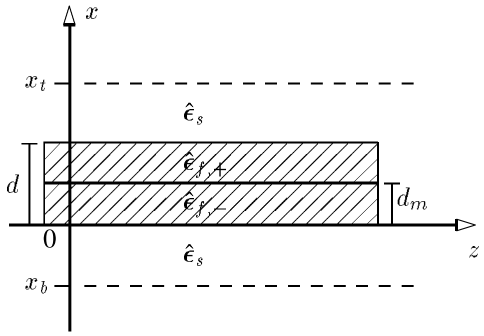


Abb. 20, zur Geometrie 2: Differenz der Ausbreitungskonstanten im magnetooptischen Film als Funktion der Filmdicke. Senkrecht: $\beta_- - \beta_+$ in cm^{-1}; waagerecht: d in μm. Die Linie bezeichnet analytische Werte nach (2.10).

Schon aufgrund der diskreten Fouriertransformation über die endliche Strecke $N_m \Delta z_m$ muß man den BPM–Werten eine Unsicherheit von $\pm(2 \times 0.24\ \mathrm{cm}^{-1})$ zuordnen. Entsprechende Fehlerbalken im Diagramm schließen die analytische Kurve vollständig ein, wenn man den Wert zu $d = 0.3\,\mu$m ausnimmt; vermutlich verursacht das Rechenfenster die dort größere Abweichung. Demnach scheinen die Ausbreitungsalgorithmen auch für magnetooptische, vorerst planare Stukturen geeignet.

Gegenstand der weiteren Simulationen dieses Abschnitts soll die planare Isolatorstruktur aus (2.9) sein, und zwar zunächst ein Einzelwellenleiter wie in der folgenden Skizze:



Geometrie 3: zweischichtiger magnetooptischer Wellenleiter

Zwei Schichten der Höhen $d - d_m$ und d_m mit den Permittivitäten $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{f,+} = (\epsilon_f, +m_f)$ und $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{f,-} = (\epsilon_f, -m_f)$, $\epsilon_f = 5.3$, sind umgeben von Bereichen mit der Permittivität $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_s = (\epsilon_s, 0)$, $\epsilon_s = 3.8025$. Die Rechnungen zu dieser und den folgenden Strukturen sollen überwiegend qualitativ die BPM an den Aussagen in (2.9) testen, es wurden deshalb nur vergleichsweise grobe transversale Diskretisierungen verwendet; in diesem Fall zwischen den Rechenfenstergrenzen $x_b = -1.18\,\mu$m, $x_t = 1.78\,\mu$m mit $N_x = 75$, $\Delta x = 0.04\,\mu$m. Wellenlänge war $\lambda = 1.3\,\mu$m, die Gesamthöhe des Filmbereichs $d = 0.6\,\mu$m. Die Modenanalysen dazu setzten das Feld nach einer Initialisierungsphase und Gauß'scher Anregung $N_m = 65536$ mal über $\Delta z_m = 2.0\,\mu$m fort. Nach einer ersten solchen Rechnung ist der nichtmagnetooptische Wellenleiter ($m_f = 0$) einmodig mit einer Ausbreitungskonstanten $\beta_0 = 10.5398\,\mu\text{m}^{-1}$; das legt den Referenzbrechungsindex der magnetooptischen Analysen zu $n_r = 2.1807$ fest.

Für $|m_f| \neq 0$ ergeben sich je nach Vorzeichen von $|m_f|$ verschiedene Ausbreitungskonstanten β_+, β_-. Nach Abb. 21 wird die Differenz $\Delta\beta = |\beta_+ - \beta_-|$ maximal, wenn sich die Grenze zwischen den entgegengesetzt magnetisierten Bereichen gerade in der Mitte des Films, in der Nähe des Maximums der auch für $|m_f| \neq 0$ noch ungefähr zu $x = 0.3\,\mu$m symmetrischen Modenfunktion befindet.

Man findet dort bespielsweise die Ausbreitungskonstanten und Differenzen ($d_m = 0.3\,\mu$m ist in der gewählten Diskretisierung keine zulässige Grenzlage):

d_m / μm	$\lvert m_f \rvert$	$\beta_+ / \mu\text{m}^{-1}$	$\beta_- / \mu\text{m}^{-1}$	$\Delta\beta / \text{cm}^{-1}$
0.28	0.005	10.5413	10.5383	29.6
0.28	0.1	10.5707	10.5114	592.9

Demnach liegen die neuen Ausbreitungskonstanten symmetrisch um β_0. Die Differenzen $|\beta_+ - \beta_0|$, $|\beta_0 - \beta_-|$ und $\Delta\beta$ ändern sich recht gut maßstäblich mit $|m_f|$, der Quotient der Außerdiagonalelemente stimmt mit dem Quotienten der zugehörigen $\Delta\beta$–Werte nahezu überein (vgl. Abb. 21). Das legt nahe, für qualitative Untersuchungen insbesondere in der dreidimensionalen Situation unrealistisch große Außerdiagonalelemente zu verwenden, um deren Einfluß bereits auf kürzeren Distanzen zu beobachten

Nach den Gleichungen (36) und (37) wirken sich die Außerdiagonalelemente ausschließlich an den Permittivitätsgrenzen auf Modenfunktionen und Ausbreitungskonstanten aus, und zwar multipliziert mit der dortigen Feldstärke ((36) mit dem Modenansatz (48)). Dadurch wird einerseits das Maximum in $\Delta\beta$ für d_m am Maximum der Modenfunktion, andererseits die Symmetrie des Diagramms zu $d_m = d/2$ plausibel.

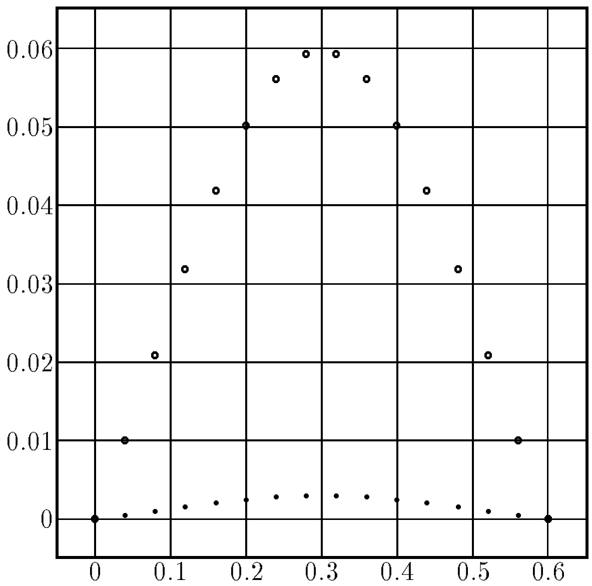


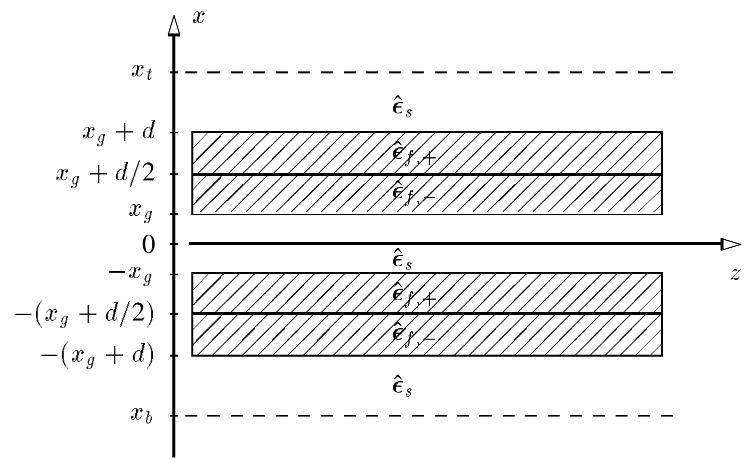
Abb. 21, zur Geometrie 3: Ausbreitungskonstanten-differenz $\Delta\beta$ in μm^{-1} (senkrecht) gegen die Schicht-dicke d_m in μm (waagerecht). Offene Kreise bezeichnen Werte zu $|m_f| = 0.1$, ausgefüllte solche zu $|m_f| = 0.005$. Erstere ergeben sich nahezu deckungsgleich, wenn man letztere mit 20 multipliziert. Zu $|m_f| = 0.005$ gehört bei $d_m = 0.3\,\mu m$ ein Maximum $\Delta\beta = 30.0\,cm^{-1}$.

$\beta_+(d_m)$ und $\beta_-(d_m)$ einzeln zeigen das gleiche Symmetrieverhalten. Für $d_m = 0$ bzw. $d_m = d$ gleicht die Struktur dem dreischichtigen Wellenleiter aus (2.10), die transversale Resonanzbedingung (60) läßt sich mit $\epsilon_c = \epsilon_s$ anwenden, hier in der äquivalenten Form

$$\tan(w_f d) = 2\frac{\epsilon_f w_s}{\epsilon_s w_f} \bigg/ \left(1 - \frac{\epsilon_f^2}{w_f^2}\left(\frac{w_s^2}{\epsilon_s^2} - \frac{m_f^2\beta^2}{\epsilon_f^4}\right)\right) .$$

m_f geht nicht in ungerader Ordnung ein, entsprechend verschwindet die Differenz $\Delta\beta$ für $d_m = 0$ und $d_m = d$.

In einem zweiten Schritt ergänzt ein gleichartiger Wellenleiter den obigen zum in (2.9) betrachteten Koppelteil:



Geometrie 4: zwei parallele magnetooptische Wellenleiter

Ohne Magnetisierung ist die Struktur symmetrisch zur Ebene $x = 0$ mit einer Spaltbreite $2x_g = 0.3\,\mu$m; die Permittivitäten, Wellenlänge und Filmdicke d behalten die oben angegebenen Werte. Zu den Rechnungen gehört die transversale Diskretisierung $x_b = -2.115\,\mu$m, $x_t = 2.115\,\mu$m, $N_x = 142$, $\Delta x = 0.03\,\mu$m.

In dieser Struktur kann man mit Hilfe eines Anfangfeldes gleicher Symmetrie je eine zur Ebene $x = 0$ symmetrische und eine dazu antisymmetrische Mode anregen, mit den Ausbreitungskonstanten $\beta_{s,0} = 10.6106\,\mu\mathrm{m}^{-1}$ und $\beta_{a,0} = 10.4683\,\mu\mathrm{m}^{-1}$ im nichtmagnetisierten Wellenleiter mit $m_f = 0$. Der optimale Referenzbrechungsindex zur Simulation der Kopplung ist demnach $n_r = 2.1806$.

Abb. 22 zeigt die berechneten Felder auf einer Distanz $3000{\times}0.01\,\mu$m nach einer Initialisierung aus zwei symmetrisch bzw. antisymmetrisch zu $x = 0$ kombinierten Gauß'schen Strahlen in Ausbreitungsrichtung der Breite $r_g = 0.3\,\mu$m mit Maxima in $x_s = \pm 0.45\,\mu$m. In Abb. 23 sind als zugehörige Modenfunktionen χ_s, χ_a die bzgl. (59) normierten Endfelder der über $30000{\times}0.05\,\mu$m fortgesetzten Initialisierung eingetragen.

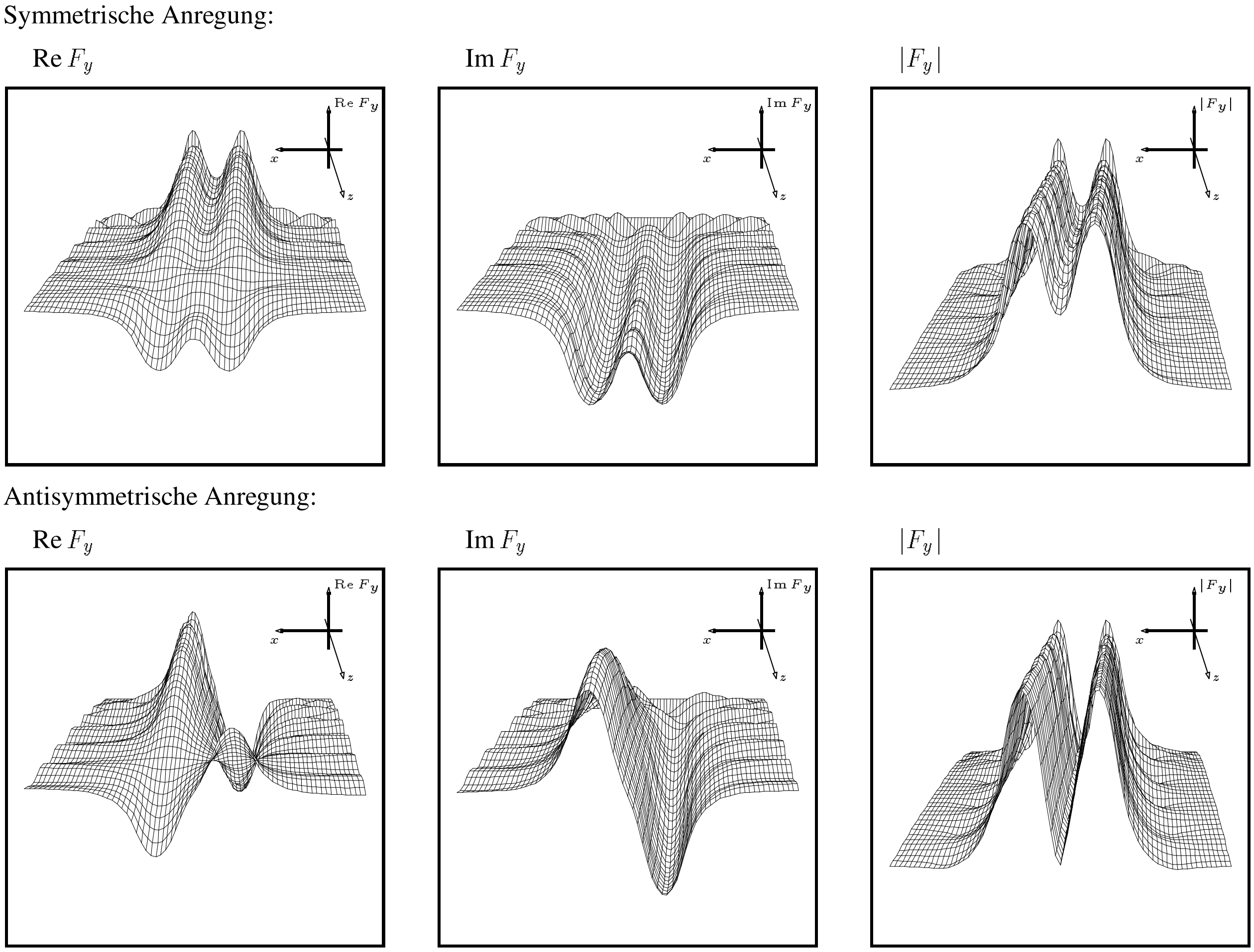


Abb. 22, zur Geometrie 4: Oberflächendiagramme zu Real–, Imaginärteil und Betrag des Modulationsfeldes über der x–z–Ebene bei bzgl. $x = 0$ symmetrischem und antisymmetrischem Anfangsfeld. Dargestellt sind jeweils die ersten $30\,\mu$m der Ausbreitung im nichtmagnetooptischen Wellenleiter $m_f = 0$. Die Höhen der vier Bilder zu Real– und Imaginärteil sind vergleichbar, ebenso diejenigen zu den Beträgen.

Abb. 24 illustriert schließlich die Ausbreitung einer einseitigen Initialisierung derselben Breite in $x_s = 0.45\,\mu$m über eine Strecke von $12000{\times}0.01\,\mu$m. Es zeigen sich als Interferenzmuster der beiden Moden die schon in (2.9) genannten versetzt auftretenden Maxima. In Abb. 25 sind die Strahlungsleistungen zur obigen Rechnung eingetragen, summiert über den oberen und unteren Filmbereich sowie das gesamte Rechenfenster.

Die Ausbreitungskonstanten $\beta_{s,0}$, $\beta_{a,0}$ ändern sich je nach Vorzeichen und Betrag von m_f. Die folgende Tabelle faßt einige Beispielwerte für die verschobenen Konstanten $\beta_{s,a;\pm}$ und ihre Differenzen zusammen:

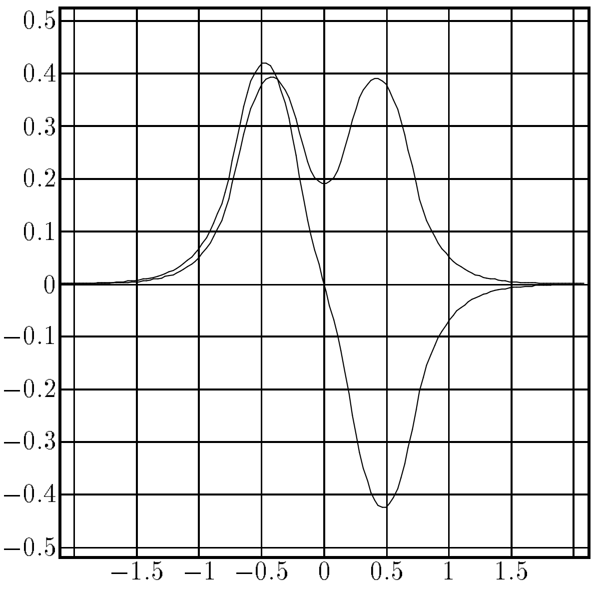


Abb. 23: Normierte Modenprofile des Wellenleiters zur Geometrie 4 mit $m_f = 0$. Senkrecht: Modenfunktionen χ_s, χ_a; waagerecht: Ort x auf dem Rechenfenster in μm.

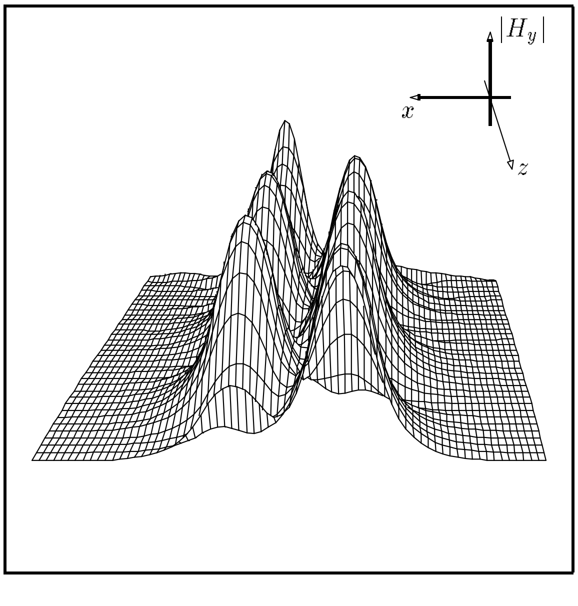


Abb. 24, zur Geometrie 4: Feldstärkebetrag $|H_y|$ über der x–z–Ebene auf einer Distanz von $120\,\mu$m nach einseitiger Gauß'scher Anregung im nichtmagnetooptischen Wellenleiter.

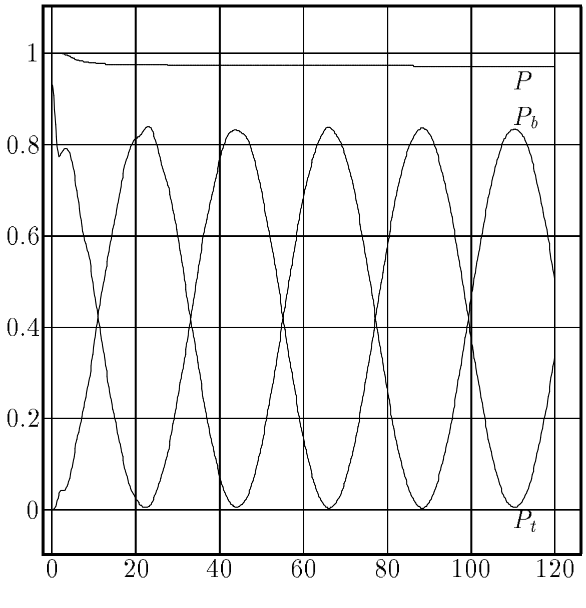


Abb. 25, zur Geometrie 4 und Abb. 24: Senkrecht: Strahlungsleistungen auf dem oberen und unteren Filmbereich P_t, P_b und dem gesamten Rechenfenster P; waagerecht: Ausbreitungsdistanz z in μm.

$\lvert m_f \rvert$	$\frac{\beta_{s,+}}{\mu\mathrm{m}^{-1}}$	$\frac{\beta_{s,-}}{\mu\mathrm{m}^{-1}}$	$\frac{\beta_{a,+}}{\mu\mathrm{m}^{-1}}$	$\frac{\beta_{a,-}}{\mu\mathrm{m}^{-1}}$	$\frac{\lvert\beta_{s,+}-\beta_{s,-}\rvert}{\mathrm{cm}^{-1}}$	$\frac{\lvert\beta_{a,+}-\beta_{a,-}\rvert}{\mathrm{cm}^{-1}}$
0	10.61061		10.46833			
0.005	10.61190	10.60937	10.47002	10.46664	25.2	33.8
0.1	10.63724	10.58668	10.50346	10.43590	505.6	675.6

Auch hier verhalten sich die Differenzen ungefähr proportional zu $|m_f|$.

Aus den Ausbreitungskonstanten lassen sich die zugehörigen Koppellängen $L = \pi/|\beta_s - \beta_a|$ berechnen, sinngemäß bezeichnet als L_+, L_-. Wenn man die Struktur — abgesehen von den notwendigen Wellenleiteranschlüssen — als Teil eines Isolators betrachten möchte, dann ist die zugehörige Bauteillänge durch $L_D = \pi/(||\beta_{s,+} - \beta_{a,+}| - |\beta_{s,-} - \beta_{a,-}||)$ festzulegen. Aus obiger Tabelle erhält man nachstehende Werte:

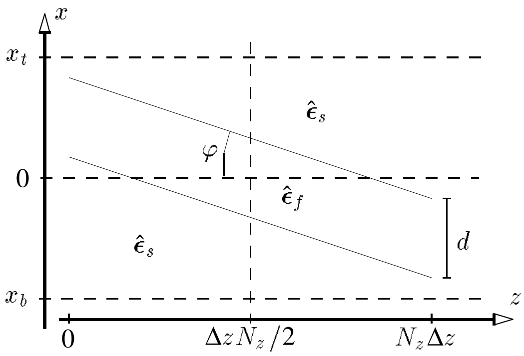
$\lvert m_f \rvert$	$L_+/\,\mu$m	$L_-/\,\mu$m	$L_D/\,\mu$m
0	22.081		
0.005	22.144	22.011	3675
0.1	23.483	20.835	184.8

Dabei gehen in L_D v.a. für $m_f = \pm 0.005$ bereits die Ungenauigkeiten aus der endlichen Ausbreitungsstrecke zur Fourierzerlegung gravierend ein. Wieder sind die Werte zu L_D durch den Proportionalitätsfaktor $0.1/0.005$ verknüpft.

Nun lassen sich aus Diagrammen wie der Abb. 25 ebenfalls die Kopplungslängen L_0 (für $m_f = 0$) und L_+, L_- ablesen. Aus Rechnungen wie zu dieser Abbildung erhält man $L_0 = 22.10\,\mu$m und für $|m_f| = 0.1$ die Werte $L_+ = 23.44\,\mu$m, $L_- = 20.83\,\mu$m, in guter Übereinstimmung mit der Tabelle.

4.5 Ausbreitung in längsinhomogenen Strukturen

Zur Charakterisierung der Ausbreitungsalgorithmen bei in z–Richtung schwach veränderlicher Permittivität sollen nach der folgenden Skizze schief angeordnete planare Wellenleiter dienen:



Geometrie 5: gegen die Ausbreitungsrichtung verkippter Wellenleiter

Darin schließen die Grenzen eines isotropen Films der Dicke d mit Permittivität $\hat{\epsilon}_f = (\epsilon_f, 0)$ umgeben von einem Substrat $\hat{\epsilon}_s = (\epsilon_s, 0)$ mit der Ausbreitungsachse den kleinen Winkel φ ein. Die Rechenfenstergrenzen $x_b = -x_t$ sind so gewählt, daß sich der Filmbereich nach der halben Ausbreitungsdistanz $N_z \Delta z/2$ in der Fenstermitte $x = 0$ befindet. Wählt man als Initialisierung einen Gauß'schen Strahl mit Maximum bei $x_s = \tan \varphi N_z \Delta z/2$ in der Filmmitte in Richtung des Wellenleiters $\alpha_v = -\varphi$, (vgl. Skizze) zum Brechungsindex $n_g = \sqrt{\epsilon_f}$, dann sollte die daraus berechnete Gesamtleistung P auf dem Rechenfenster als Funktion der Ausbreitungsstrecke einen Verlauf erhalten, der nicht wesentlich von der Kurve zum nicht gekippten Wellenleiter ($\varphi = 0^o$) abweicht. Abb. 26 zeigt entsprechende Ergebnisse zum Parametersatz $\lambda = 1.3\,\mu$m, $d = 0.6\,\mu$m, $\epsilon_s = 3.8025$, $\epsilon_f = 5.3$, $N_z = 4500$, $\Delta z = 0.025\,\mu$m, $x_b = -3.615\,\mu$m, $x_t = 3.615\,\mu$m, $N_x = 242$, $\Delta x = 0.03\,\mu$m, $r_g = 0.3\,\mu$m. Referenzbrechungsindex war der zur Ausbreitungskonstanten im Wellenleiter zu $\varphi = 0^o$ gehörende Wert $n_r = 2.172$.

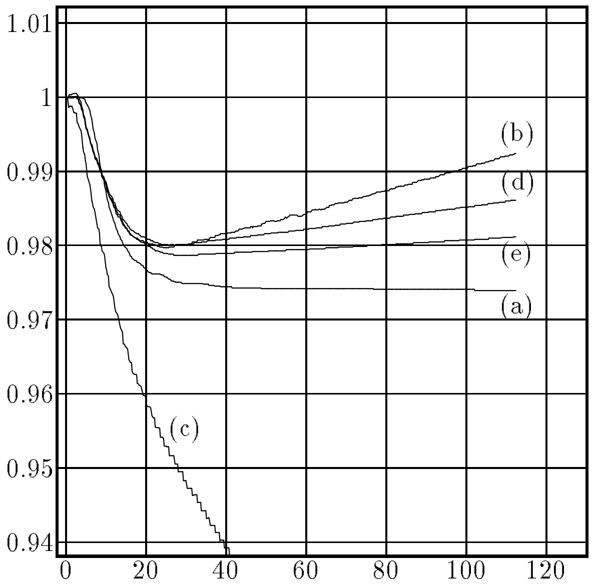


Abb. 26, zur Geometrie 5: Leistungskurven zu verschiedenen Feldkorrekturen an den Übergängen zwischen längshomogenen Abschnitten. Senkrecht: Gesamtleistung P auf dem Rechenfenster; waagerecht: Ausbreitungsdistanz z in μm. Kurve (a) gehört zum Wellenleiterwinkel $\varphi = 0^o$, Kurven (b) – (e) zum Winkel $\varphi = 1.5^o$. (b): ohne Korrekturen, (c): mit Feldentspannung, (d): mit Normierung ($N_R = 5$); (e): mit Feldentspannung und Normierung.

Im nicht gekippten Wellenleiter gibt die Leistung (a) nach einer Abstrahlungsphase den Modenanteil des Anfangsfeldes wieder, diese Kurve bildet die Referenz für die Berechnungen im leicht geneigten Film. Betrachtet man die Werte auf den ersten Schrittweiten zu Beginn der Ausbreitung, dann zeigt sich ein im Diagramm nicht sichtbarer, sehr geringer Leistungszuwachs. Die Feldwerte an den Rechenfensterrändern sind noch annähernd 0, ungenügend funktionierende Randbedingungen also vermutlich nicht die Ursache. Nach einer gewissen Distanz erreichen nicht geführte Feldanteile die Ränder, die Gesamtleistung fällt. Es ist zu erwarten, daß sich diese Vorgänge — weniger ausgeprägt — bei jeder Umsetzung des Feldes auf eine geänderte Permittivität wiederholen.

Verwendet man für $\varphi = 1.5^o$ das Endfeld eines längshomogenen Abschnittes ohne weitere Änderungen als Anfangsfeld des nächsten, dann entsteht die Kurve (b), an den Übergangsstellen zeigen sich kleine Sprünge. Demnach wird auch im geneigten Wellenleiter zu Anfang eine Abstrahlung ähnlich der Kurve (a) modelliert. Es stellt sich ein Modenfeld ein, dessen Leistungskurve abschnittsweise aus dem Anfang der Kurve (a) zusammengesetzt zu sein scheint. Die Distanzen mit gleichbleibender Permittivität ($45\Delta z$ für $\varphi = 1.5^o$) sind offenbar so kurz, daß jeweils vor dem Abklingen des oben genannten Leistungszuwachses die Permittivität wieder wechselt. Insgesamt ergibt sich ein kontinuierlicher Leistungsanstieg. Trägt man entsprechende Werte zu kleineren Wellenleiterwinkeln bzw. größeren längshomogenen Abschnitten gegen die Ausbreitungsstrecke auf, dann zeigt sich analog ein starker Leistungsabfall im Modenfeld.

Mit Hilfe der Korrekturen (99), (100) läßt sich wenigstens der unphysikalische Anstieg der Leistung vermeiden (c), allerdings treten dann übertriebene Leistungsverluste auf. Die in (3.6) beschriebene Normierung glättet die Leistungskurve (d), reduziert auch etwas den Zuwachs. Je länger die Strecke $N_R\Delta z$, umso mehr wird der Anstieg unterdrückt, umso größer wird aber auch der Fehler in der Abstrahlungsphase. In den Rechnungen zum Diagramm war $N_R = 5$. Ein guter Wert N_R wird je nach Wellenleiterwinkel verschieden sein. Normierung und Feldentspannung zusammen führen zu einem Leistungsverlauf (e), der näher am gewünschten liegt. Abb. 27 illustriert das mit beiden Korrekturen berechnete Feld.

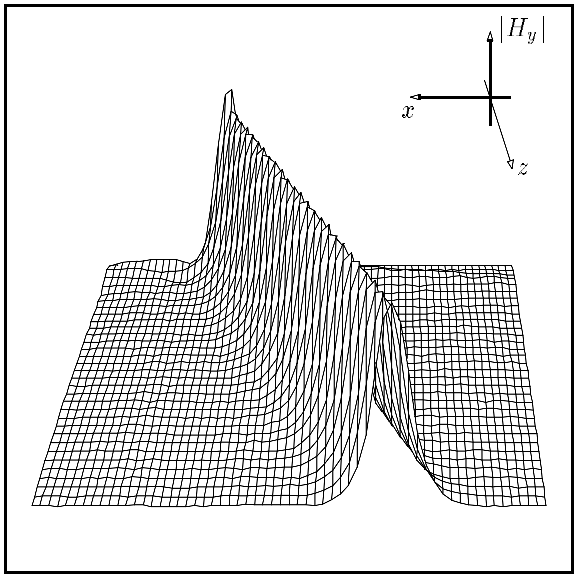


Abb. 27, zur Geometrie 5: Felstärkebetrag $|H_y|$ über der x–z–Ebene im $\varphi = 1.5^o$ gegen die Ausbreitungsrichtung geneigten Wellenleiter.

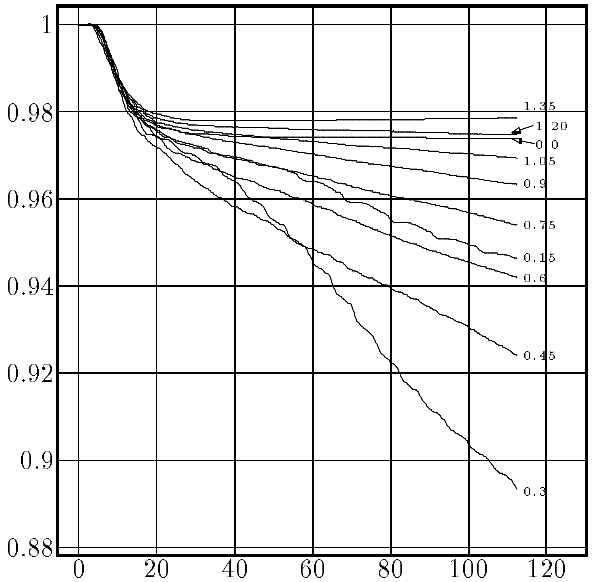
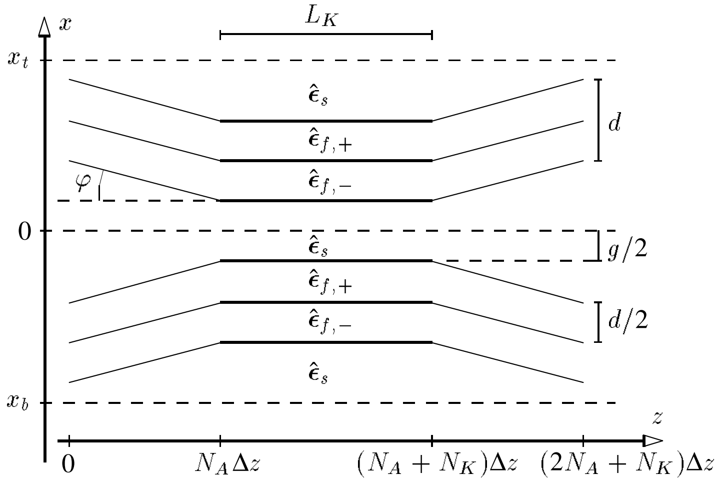


Abb. 28, zur Geometrie 5: Senkrecht: Gesamtleistung P auf dem Rechenfenster; waagerecht: Ausbreitungsdistanz z in μm. Parameter ist der Wellenleiterwinkel φ in ^{o}.

Dennoch liefern die Ausbreitungsrechnungen in diesem Fall verglichen mit ähnlichen längshomogenen Strukturen wenig verläßliche Aussagen zur geführten Leistung. Nach Abb. 28 fächern die Leistungskurven auch mit den recht willkürlichen Korrekturen im nur sehr kleinen Winkelbereich $\varphi \in [0^o, 1.5^o]$ noch erheblich auf. Sie liegen näher beieinander, wenn man Strukturen mit geringeren Brechzahlunterschieden untersucht oder die transversalen Schrittweiten feiner wählt. Eine detailliertere Untersuchung dazu findet sich in [26]; die hier verwendeten Permittivitäten gehören zum „worst case“ der dort untersuchten Situationen.

4.6 Ein zweidimensionaler Koppel-Isolator

Nun lassen sich die bislang betrachteten Strukturen zu einem planaren Koppler zusammensetzen, der nach geeigneter Festlegung der Geometrie als Isolator funktionieren kann.



Geometrie 6: planarer magnetooptischer X–Koppler

Auf einer Strecke $N_A\Delta z$ nähern sich zwei doppelschichtige magnetooptische Wellenleiter der Dicke d mit Permittivität $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{f,\pm} = (\epsilon_f, \pm m_f)$ im Substrat zu $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_s = (\epsilon_s, 0)$ bis auf einen Abstand g im Winkel φ zur Ausbreitungsrichtung an, verlaufen über eine Länge $L_K = N_K\Delta z$ parallel und entfernen sich danach voneinander, wieder mit dem Winkel φ zur Ausbreitungsrichtung über die Distanz $N_A\Delta z$.

Zu den folgenden Rechnungen gehören die festen Parameter $\lambda = 1.3\,\mu$m, $\epsilon_f = 5.3$, $\epsilon_s = 3.8025$, $d = 0.6\,\mu$m, $\varphi = 1.5^o$, $N_A = 2500$, $\Delta z = 0.025\,\mu$m und $n_r = 2.1806$ (Mittelwert der Ausbreitungskonstanten des Mittelteiles für $g = 0.3\,\mu$m). Die Rechnungen starten mit Gauß'schen Strahlen der Breite $r_g = 0.3\,\mu$m mit Maximum in der Mitte des oberen ($x > 0$) oder unteren ($x < 0$) Wellenleiters zur jeweiligen Wellenleiterrichtung ($\alpha_v = \pm\varphi$). Während der längsinhomogenen Phasen wird das Feld an jeder Abschnittsgrenze nach (99),(100) abgeändert und nach $N_R = 5$ weiteren Schritten umnormiert.

Die Abbildungen 30 und 29 zeigen den Verlauf der Strahlungsleistungen auf dem Rechenfenster und den Filmbereichen bzw. den Feldstärkebetrag für den isotropen Wellenleiter ($m_f = 0$), diskretisiert zwischen $x_b = -3.615\,\mu$m und $x_t = 3.615\,\mu$m mit $N_x = 242$ Punkten, $\Delta x = 0.03\,\mu$m, zur Länge $L_K = 150\,\mu$m und Spaltbreite $g = 0.3\,\mu$m. Im dortigen Maßstab fällt kaum auf, daß die Kurve zur Gesamtleistung P in Abb. 30 auf den längsinhomogenen Abschnitten wie in (4.5) geringfügig ansteigt.

Je nach Länge L_K des Kopplermittelteiles verteilt sich die Strahlungsleistung auf die Kopplerausgänge, dabei beginnt und endet die Überkopplung zwischen den beiden Wellenleitern geringfügig vor bzw. hinter dem Mittelteil. Modenberechnungen allein können demnach nur Anhaltspunkte für die Gesamtlänge eines solchen Bauteils liefern. In Abb. 31 sind die Leistungen in den Ausgängen des isotropen Kopplers (wie oben) gegen die Länge L_K des mittleren Abschnittes aufgetragen. Aus einem solchen Diagramm kann man die Bauteillänge für die gewünschte Funktion ablesen, beispielsweise ergibt sich für $L_K = 25\,\mu$m eine Struktur, die die Leistung aus jedem Eingang gleichmäßig auf beide Ausgangswellenleiter verteilt.

Eine solche Untersuchung läßt sich auch im magnetisierten Koppler durchführen. Abb. 32 zeigt für $|m_f| = 0.1$ mit beibehaltener Spaltbreite $g = 0.3\,\mu$m und Diskretisierung die Leistungen in den Kopplerausgängen als Funktion von L_K. Eine gute Isolatorwirkung ist dann gegeben, wenn für verschiedene

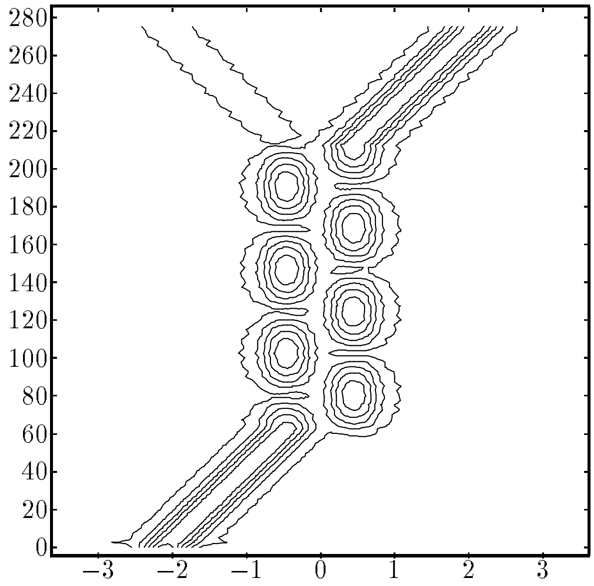


Abb. 29, zur Geometrie 6: Linien mit gleichem Felstärkebetrag $|H_y|$ im isotropen Koppler. Senkrecht: Ausbreitungsdistanz z in μm; waagerecht: Ort x auf dem Rechenfenster in μm.

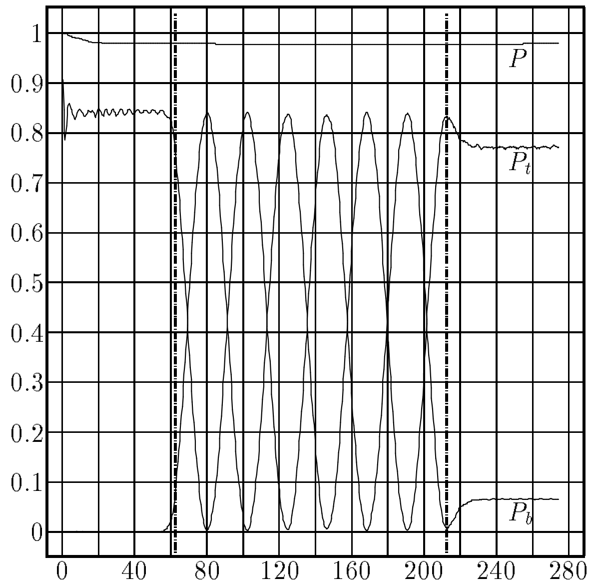


Abb. 30, zur Geometrie 6: Strahlungsleistungen im isotropen Koppler (senkrecht), aufgetragen gegen die Ausbreitungsdistanz z in μm. P: Leistung auf dem gesamten Rechenfenster; P_t, P_b: Leistungen im oberen bzw. unteren Filmbereich.

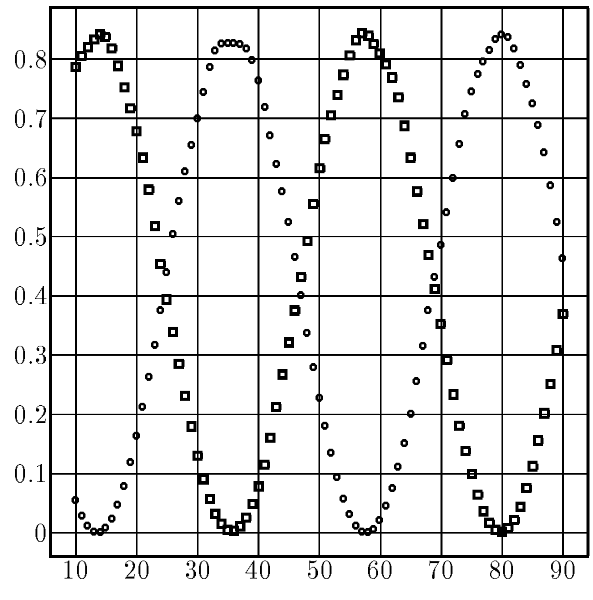


Abb. 31, zur Geometrie 6: Senkrecht: Leistungen P_b, P_t des Endfeldes auf den Filmbereichen nach Ausbreitung im isotropen Koppler; waagerecht: Länge L_K des Koppelabschnittes in μm. Kreise bezeichnen die Leistungen auf dem unteren, Kästchen solche auf dem oberen Filmbereich. Die Rechnungen starten mit einer Gauß'schen Anregung im unteren Wellenleiter.

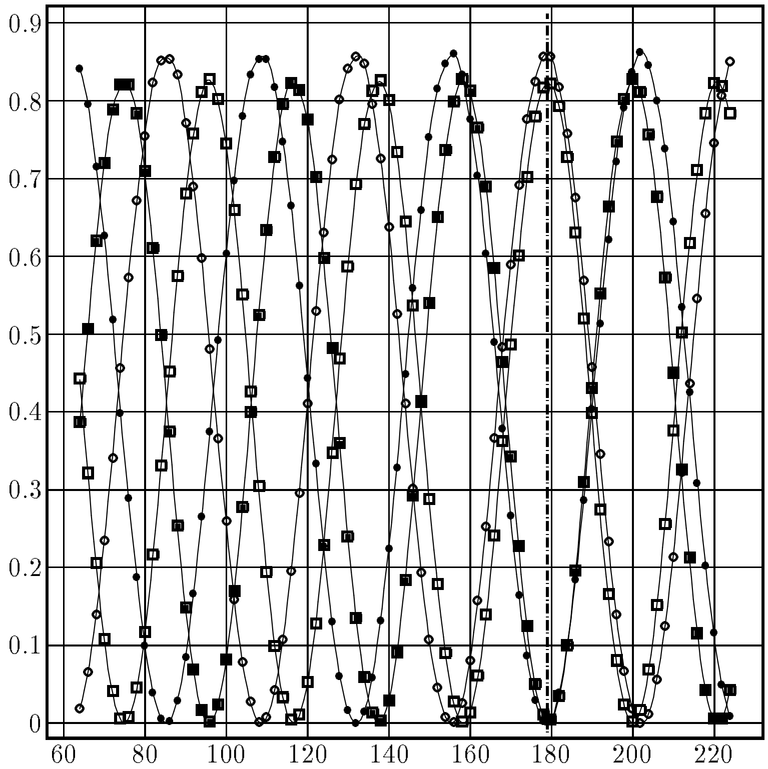


Abb. 32, zur Geometrie 6: Senkrecht: Leistungen des Endfeldes auf den Filmbereichen; waagerecht: Länge L_K des Koppelabschnittes in µm. Kreise bezeichnen Werte zu $m_f = 0.1$ bei Initialisierung im unteren Wellenleiter, Kästchen Werte zu $m_f = -0.1$ nach Initialisierung oben. Offene Symbole kennzeichnen die Leistung im unteren, ausgefüllte Symbole die Leistung im oberen Ausgang.

Lichtlaufrichtungen, die den Vorzeichen von m_f entsprechen, Anregungen aus verschiedenen Eingängen zum selben Ausgang weitergerechnet werden. Entsprechend starten die Rechnungen zur Ausbreitung in Vorwärtsrichtung ($m_f = +0.1$) für Abb. 32 mit einem Gauß'schen Strahl im unteren Wellenleiter, diejenigen zur Rückwärtsrichtung ($m_f = -0.1$) mit einer Anregung oben. Für $L_K = 179\,\mu$m erhält man demnach einen gut funktionierenden Isolator (siehe Abb. 33), dieser Wert ist etwas geringer als der aus den Modenanalysen gewonnene. Ggfs. könnte man mit gleichen, aber langwierigeren Rechnungen überprüfen, ob sich auch diese Länge mit $|m_f|^{-1}$ maßstäblich ändert.

Nun ermöglichen derartige Ausbreitungsrechnungen, den Einfluß der beteiligten Parameter auf die Funktionsweise des Bauteils abzuschätzen. Nach Abb. 34 hängt die Isolationswirkung beispielsweise sehr empfindlich von der Spaltbreite g im Koppelbereich ab. Der Einfachheit halber wurde die Struktur zur oben ermittelten Länge $L_K = 179\,\mu$m zwischen $x_b = -3.62625$ und $x_t = 3.62625$ etwas feiner mit $N_x = 968$, $\Delta x = 0.0075\,\mu$m diskretisiert und die Wellenleiter um jeweils eine ganze Schrittweite versetzt. Demnach zerstört bereits ein Fehler von zwei transversalen Schrittweiten in der Spaltbreite die Funktion des Isolators.

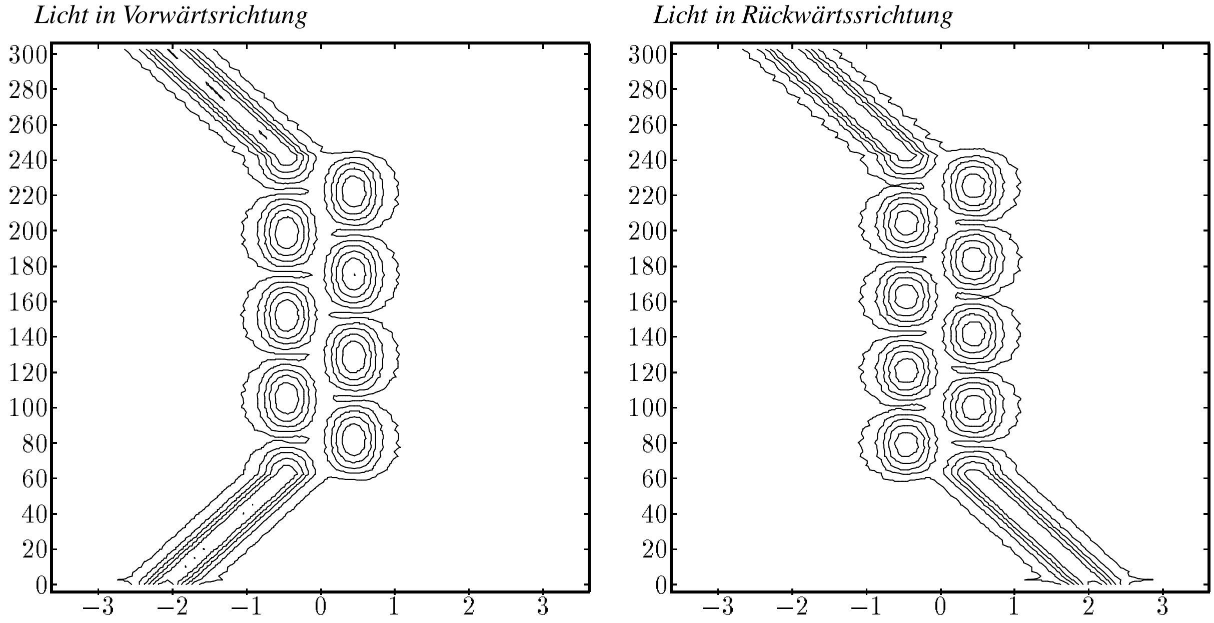


Abb. 33, zur Geometrie 6: Linien mit gleichem Feldstärkebetrag $|H_y|$ im Koppler mit $L_K = 179\,\mu$m, für $m_f = 0.1$ (links) und $m_f = -0.1$ (rechts). Senkrecht: Ausbreitungsdistanz z in μm; waagerecht: Ort x auf dem Rechenfenster in μm.

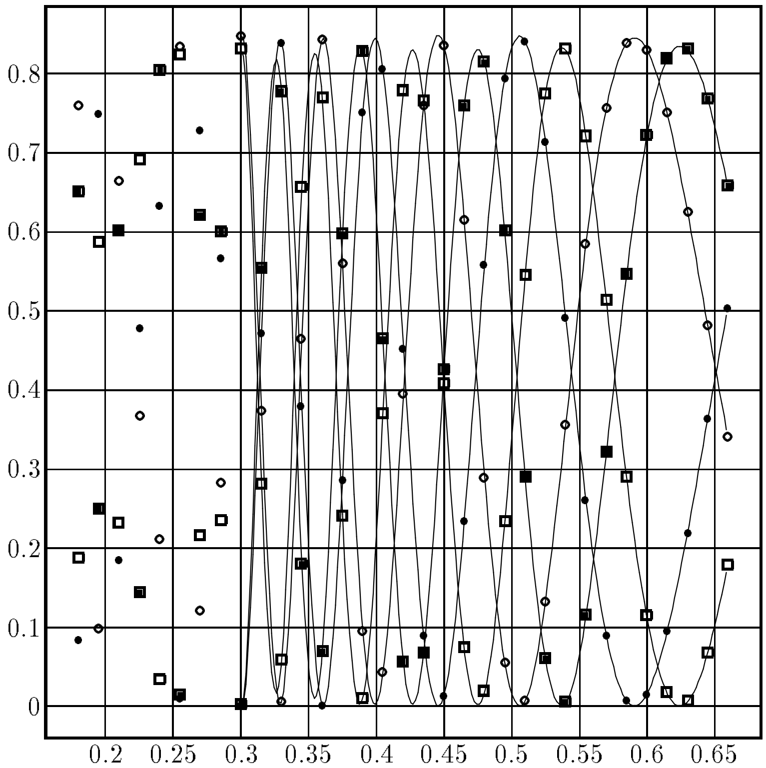


Abb. 34, zur Geometrie 6: Senkrecht: Leistungen des Endfeldes auf den Filmbereichen; waagerecht: Spaltbreite g im Kopplermittelteil in μm. Zur Bedeutung der Symbole siehe Abb. 32. Die eingezeichneten Linien dienen lediglich der Augenführung.

5 Dreidimensionale Ausbreitungsrechnungen

Nach den Untersuchungen an planaren Strukturen der letzten Abschnitte erhält das Rechenfenster nun eine zweite Koordinate y. Die folgenden vektoriellen Simulationen berücksichtigen alle Magnetfeldkomponenten einschließlich der Kopplungen in magnetisierten Materialbereichen.

5.1 Im freien Raum

Ein erster Test befaßt sich wiederum mit der Wirkung der ATBC–Randbedingungen auf Gauß'sche Strahlen. Nach mit (4.1) vergleichbaren Rechnungen erzeugt der folgende Parametersatz gut funktionierende Randbedingungen:

$\theta_{opt} = 10.5^o$, $\theta_w = 5.0^o$, $\theta_{max} = 30.0^o$, $N_\theta = N_\varphi = 80$.

Der Korrekturteil der ATBC verwendet diesmal lediglich das einfachere STBC–Verfahren zur Bestimmung der Exponentialfaktoren.

Abb. 35 und 36 zeigen die Ausbreitung eines Gauß'schen Strahles (41) mit Radius $r_g = 9\,\mu$m zur Wellenlänge $\lambda = 0.825\,\mu$m im Medium mit Brechungsindex $n = n_r = 1.0$ aus der Mitte eines $50\,\mu\text{m}\times 50\,\mu$m großen Rechenfensters, diskretisiert mit $N_x = N_y = 60$ Punkten, $\Delta x = \Delta y = 0.847\,\mu$m, $\Delta z = 0.2\,\mu$m. Der Strahl besitzt die Winkel $\alpha_h = 7^o$, $\alpha_v = 8^o$ gegen die Ausbreitungsrichtung.

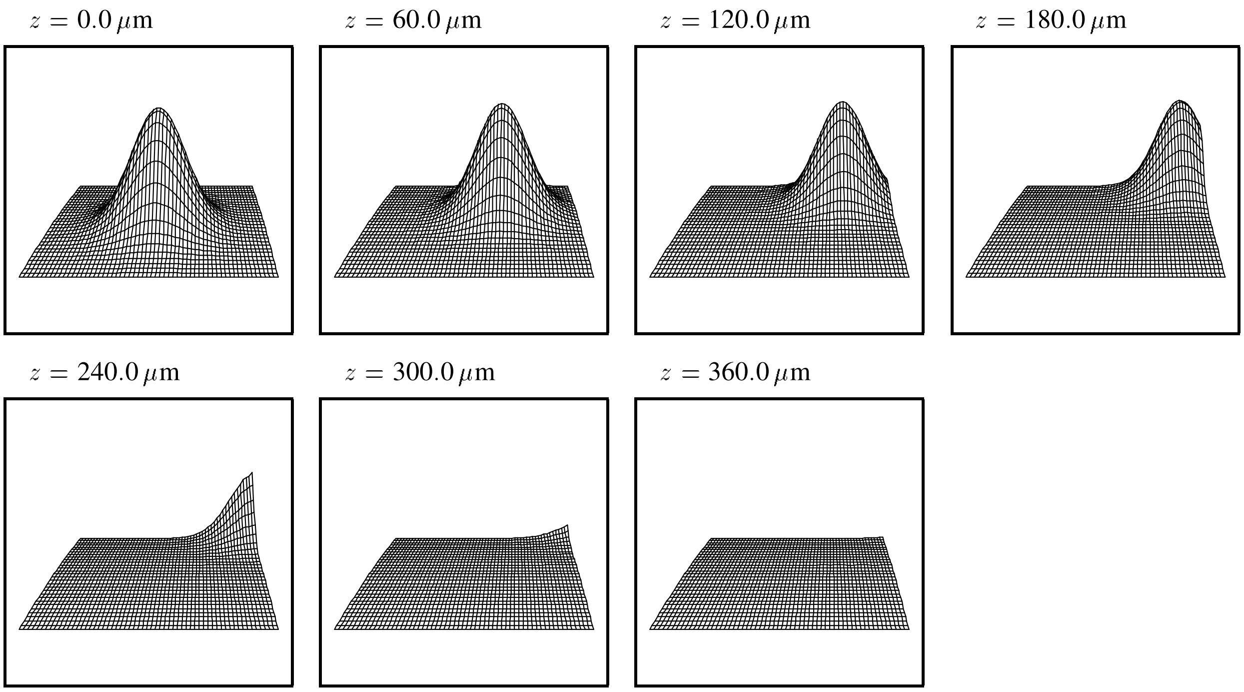


Abb. 35: Oberflächendiagramme zur Ausbreitung eines Gauß'schen Strahles mit den im Text genannten Parametern. Aufgetragen ist $|H|$ gegen den Ort auf dem Rechenfenster. Jedes Bild gehört zur darüber vermerkten Ausbreitungsdistanz.

Dieser Rechnung ist analog zu (4.1) ein Reflektionsfaktor $2.02 \cdot 10^{-6}$ zuzuordnen, bei einer Gesamtausbreitungsdistanz $N_z \Delta z = 360\,\mu$m. Als Test des vektoriellen Ausbreitungsprogramms wurde ein Strahl mit durch $\alpha_p = 45^o$ gegebener Polarisation verwendet. Die Abb. 35 und 36 entstanden aus den Feldwerten zur x–Komponente, bis auf Normierung sind diejenigen zur y– und z–Komponente damit identisch. Das Programm benötigte eine Rechenzeit von 22min, davon 2min zur Zerlegung der Ausbreitungsmatrizen. Der Lauf eines

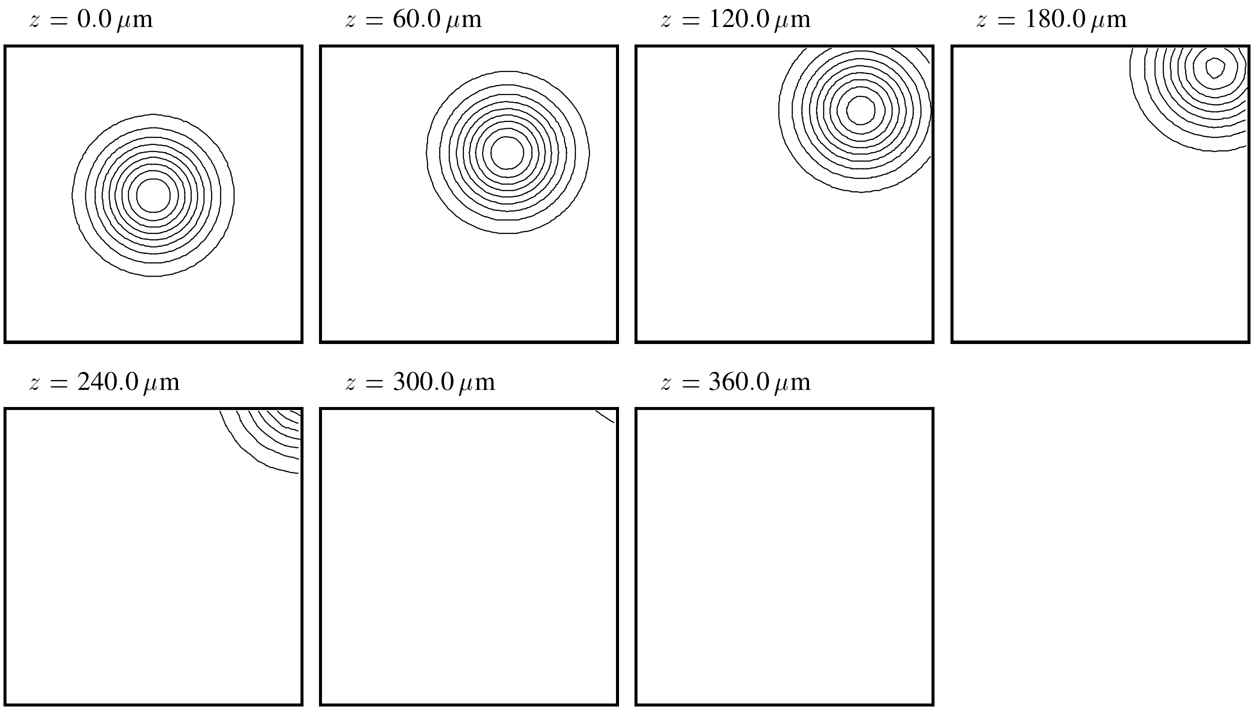


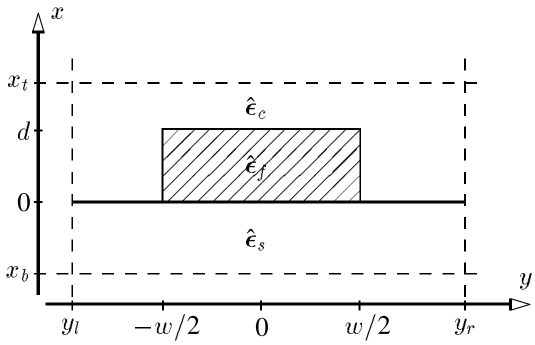
Abb. 36: Konturliniendiagramme zur Abb. 35. Eingetragen sind Linien mit gleichem $|H|$, in allen Diagrammen zu gleichen Feldstärkewerten. Die Rahmen der Einzelabbildungen geben jeweils die Fenstergrenzen an.

analogen Programmes mit TBC–Randbedingungen würde demnach 3 Tage dauern. Noch ungünstiger stellt sich dieses Verhältnis bei der Simulation von Wellenleiterstrukturen dar. Eine typische Zerlegung dauert z.B. 7min, ein Einsetzungsvorgang 1s. Das bedeutet bei 8000 Ausbreitungsschritten Programmlaufzeiten von 2.5h bzw. etwa einem Monat.

Leider erweist sich in weiteren Rechnungen der Ausbreitungsalgorithmus mit den Randbedingungen wie dargestellt als nicht ausreichend stabil. Abhilfe bringt erst die am Ende von (3.4.1) genannte Änderung. Trotz leicht erhöhter Reflektionsfaktoren und etwas verformten Strahlprofilen in Simulationen wie der obigen ergaben sich damit weiterhin stabile Ausbreitungsrechnungen.

5.2 Rippenwellenleiter

Das erste Objekt zum Test der Ausbreitungsalgorithmen an dreidimensionalen Strukturen entsteht aus der planaren Geometrie 1, wenn man den Film in y–Richtung auf eine gewisse Breite begrenzt. Die folgende wie auch alle weiteren Sizzen dieses Kapitels zeigen die Permittivität auf einem Querschnitt, die Strukturen sollen längshomogen sein.



Geometrie 7: einfacher Rippenwellenleiter

Auf ein Substrat mit Permittivität $\hat{\epsilon}_s = (3.8025, 0)$ ist ein isotroper Film der Breite $w = 1.2\,\mu$m und Höhe $d = 0.6\,\mu$m mit Permittivität $\hat{\epsilon}_f = (5.3, 0)$ gesetzt, bedeckt von Luft $\hat{\epsilon}_c = (1.0, 0)$. In der Struktur soll sich Licht der Wellenlänge $\lambda = 1.3\,\mu$m ausbreiten. Das Rechenfenster $[x_b, x_t]\times[y_l, y_r]$ umfaßt den Bereich $[-1.59, 1.47]\times[-1.47, 1.47]\,\mu\text{m}^2$, recht grob diskretisiert mit $N_x = 52$, $N_y = 50$ Punkten zu transversalen Schrittweiten $\Delta x = \Delta y = 0.06\,\mu$m. Die folgenden Rechnungen dazu verwenden die longitudinale Schrittweite $\Delta z = 0.05\,\mu$m und den zur Ausbreitungskonstante der in y–Richtung polarisierten Grundmode gehörenden Referenzbrechungsindex $n_r = 2.0939$.

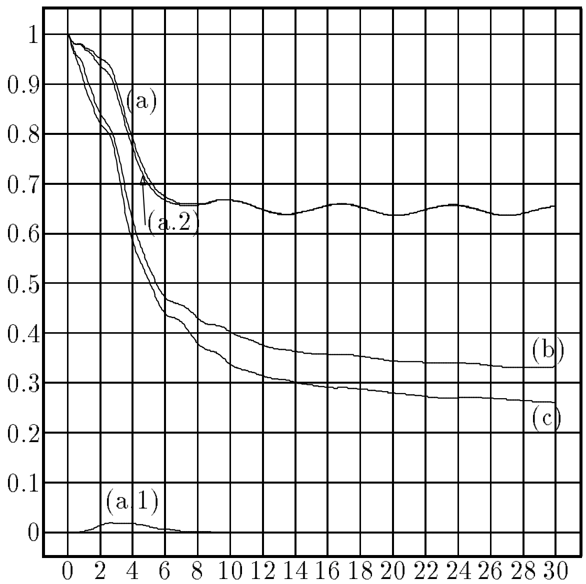


Abb. 37, zur Geometrie 7: Senkrecht: Strahlungsleistungen P, X, Y auf dem Rechenfenster; waagerecht: Ausbreitungsdistanz z in μm. (a), (a.1), (a.2): Leistungen nach Gauß'scher Anregung der Breite $r_g = 0.6\,\mu$m, (a): Gesamtleistung P, (a.1) Leistungsanteil X der H_x–Komponente, (a.2) Leistungsanteil Y der H_y–Komponente; (b): Leistung P nach Gauß'scher Initialisierung der Breite $r_g = 1.0\,\mu$m; (c): Leistung P nach Anregung mit einer Hutfunktion zu den im Text gegebenen Daten.

Abb. 37 zeigt die auf einer recht kurzen Ausbreitungsstrecke über 600 Schritte oder $30\,\mu$m erhaltenen Leistungen bzw. Leistungsanteile des Feldes auf dem Rechenfenster nach verschiedenen, y–polarisierten Initialisierungen. Die Kurven (a), (a.1), (a.2) entstanden aus einem schmalen Gauß'schen Strahl wie (41) zu den Parametern $\alpha_h = \alpha_v = \alpha_p = 0^o$, $r_g = 0.6\,\mu$m, $x_s = 0.3\,\mu$m, $y_s = 0.0\,\mu$m. Wie in der planaren Situation fällt die Gesamtleistung (a) in einer Abstrahlungsphase auf den ersten $10\,\mu$m der Ausbreitung bis in die Nähe eines asymptotischen, durch ein (unbekanntes) Überlappintegral des Anfangsfeldes mit den beteiligten Modenfunktionen gebildeten Wertes ab. Dabei bleibt die ursprüngliche y–Polarisation des Feldes weitgehend erhalten, die Leistung X erreicht während der Abstrahlungsphase einen Maximalwert von nur 0.019. Auch das entstehende Modenfeld ist fast vollständig in der gleichen Richtung polarisiert.

In den Leistungskurven zu dieser Anregung treten erst nach der Abstrahlungsphase sichtbare Schwingungen auf. Deren Ursache ist vermutlich nicht eine Fehlfunktion der Randbedingungen, sondern die Wahl des Anfangsfeldes (vgl. (2.7)). Die Kurven (b) und (c) gehören zu Initialisierungen, die die Stetigkeitsbedingungen an den Permittivitätsgrenzen besser erfüllen als das Anfangsfeld zu (a), in diesen Kurven verschwinden die Schwingungen. Die Rechnung zu (b) startet mit einem durch $\alpha_h = \alpha_v = \alpha_p = 0^o$, $r_g = 1.0\,\mu$m, $x_s = 0.3\,\mu$m, $y_s = 0.0\,\mu$m festgelegten Gauß'schen Strahl, diejenige zu (c) mit einer Hutfunktion (42), die durch den äußeren Rahmen $x_{b0} = -1.3\,\mu$m, $x_{t0} = 1.3\,\mu$m, $y_{b0} = -1.3\,\mu$m, $y_{t0} = 1.3\,\mu$m und den inneren Rahmen $x_{b1} = -0.1\,\mu$m, $x_{t1} = 0.7\,\mu$m, $y_{b1} = -0.7\,\mu$m, $y_{t1} = 0.7\,\mu$m gegeben ist.

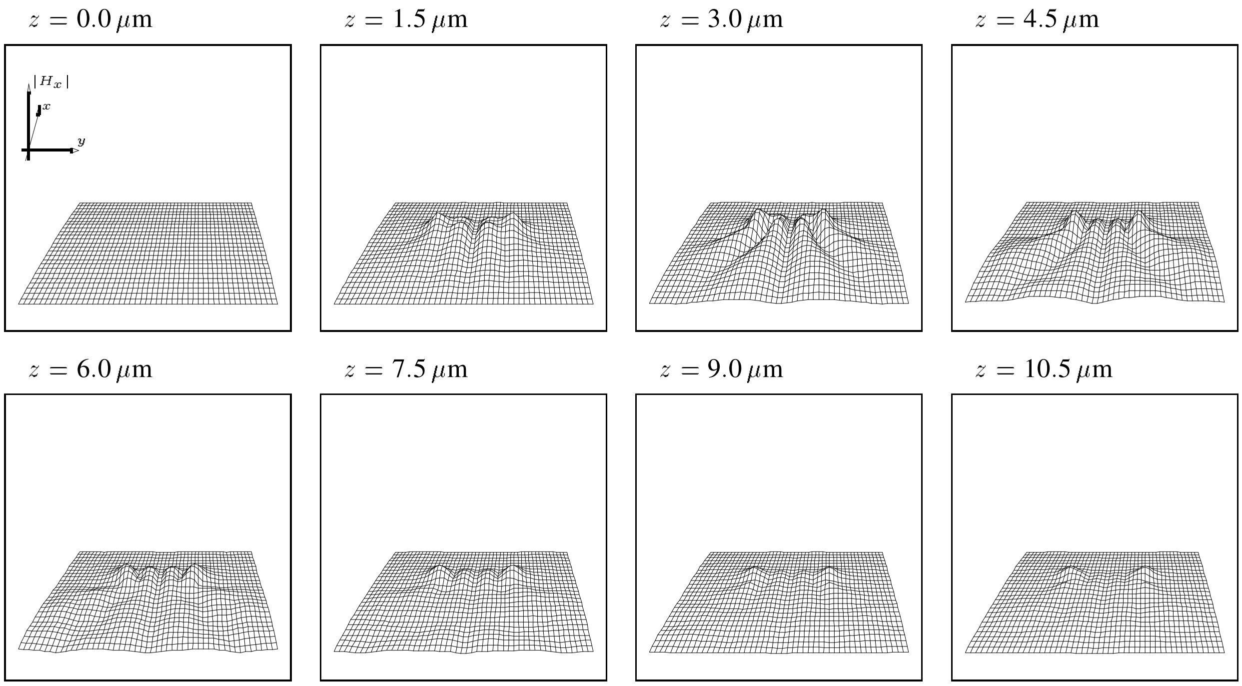


Abb. 38, zur Geometrie 7: Feldstärkebetrag $|H_x|$ über der Rechenfensterebene. Jedes Diagramm gehört zur darüber vermerkten Ausbreitungsdistanz. Blickrichtung ist die Richtung $-x$ des Substrates. Die Diagramme sind untereinander und mit denen der Abbildungen 39 und 40 maßstäblich erstellt.

Die Abbildungen 38, 39 und 40 illustrieren den Abstrahlvorgang in einer Rechnung wie zur Kurve (a) in Abb. 37 . Die Bilder zeigen die Feldstärkebeträge der drei Feldkomponenten als Funktion des Ortes auf dem Rechenfenster in gleichen Abständen von $1.5\,\mu$m über die ersten $10.5\,\mu$m der Ausbreitung. Gewisse Feldanteile scheinen das Rechenfenster hauptsächlich in Richtung des Substrates, d.h. zum Betrachter, zu verlassen; das gilt auch, wenn man die um 180^o gedrehten Daten ansieht. Man erkennt das zwischenzeitliche Anwachsen der x–Komponente und kann aus den jeweils letzten Bildern bereits das sich einstellende Modenprofil erahnen.

Bei gleicher Polarisation und Symmetrie bzw. Nullstellenzahl des Anfangsfeldes konvergieren die Felder in obigen Rechnungen zum gleichen Modenfeld. In den Abbildungen 41, 42 und 43 sind die Komponenten Re F_x, Re F_y, ImF_z der einzigen dabei angeregten Mode dargestellt. Abb 41 zeigt untereinander

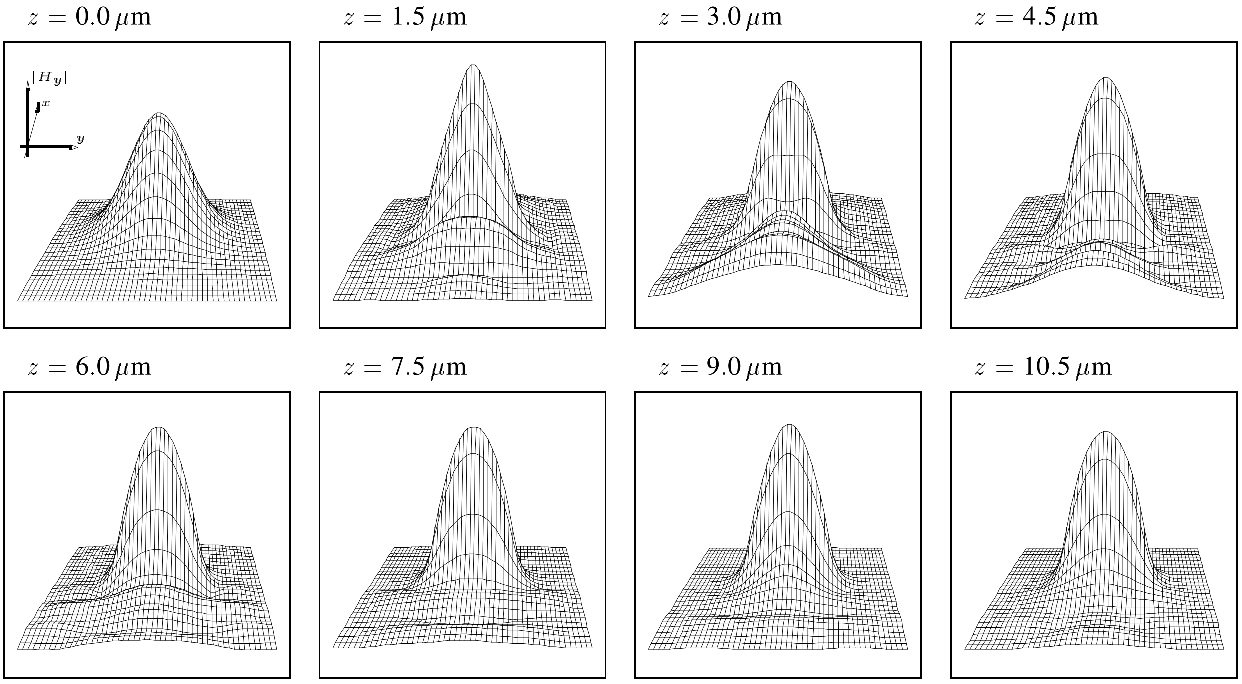


Abb. 39, zur Geometrie 7: Feldstärkebetrag $|H_y|$ über der Rechenfensterebene. Jedes Diagramm gehört zur darüber vermerkten Ausbreitungsdistanz. Blickrichtung ist die Richtung $-x$ des Substrates.

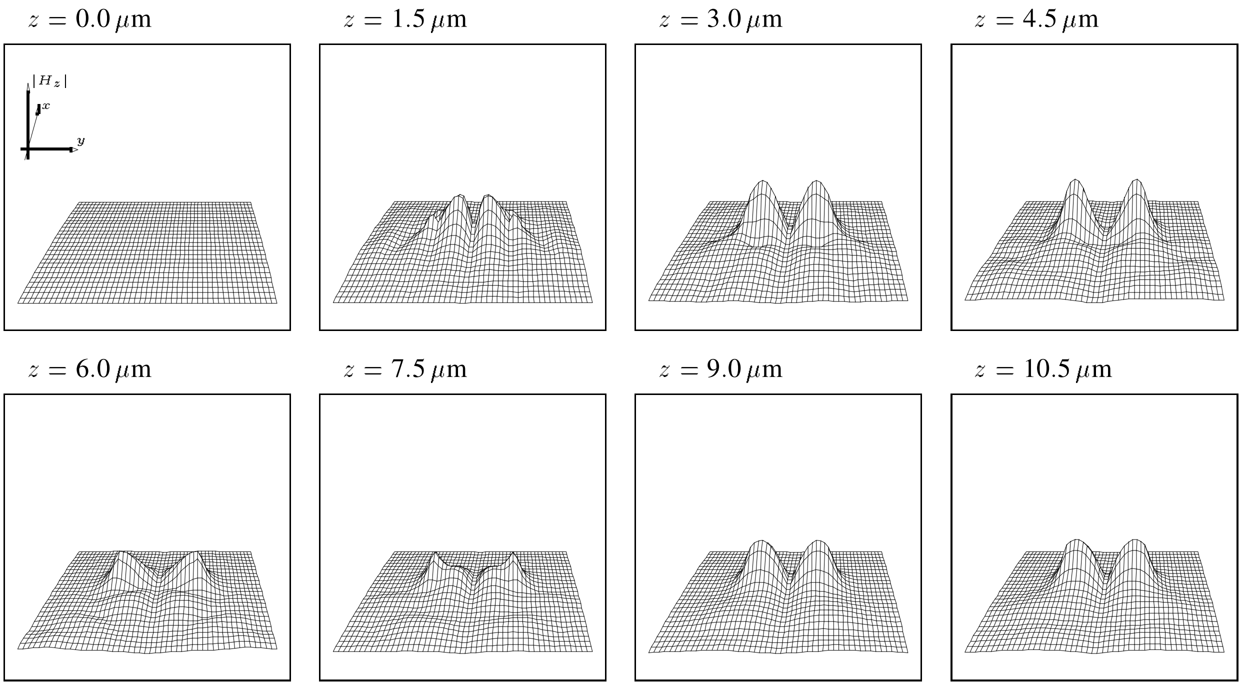


Abb. 40, zur Geometrie 7: Feldstärkebetrag $|H_z|$ über der Rechenfensterebene. Jedes Diagramm gehört zur darüber vermerkten Ausbreitungsdistanz. Blickrichtung ist die Richtung $-x$ des Substrates.

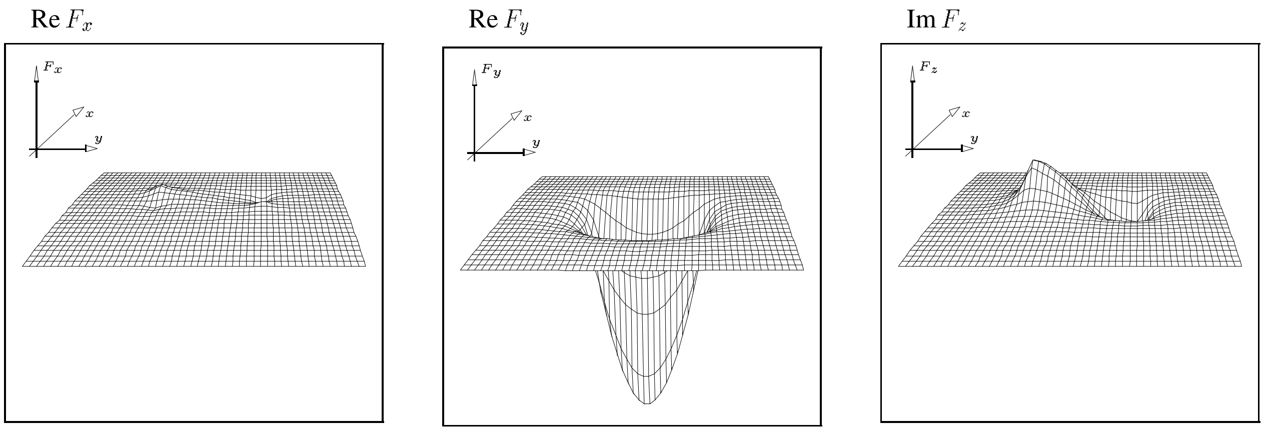


Abb. 41, zur Geometrie 7: Komponenten der durch die Anfangsfelder zu Abb. 37 angeregten Mode, als Funktion des Ortes auf dem Rechenfenster; Blick aus Richtung des Substrates. Die Diagramme sind untereinander und mit denen der Abb. 43 maßstäblich erstellt.

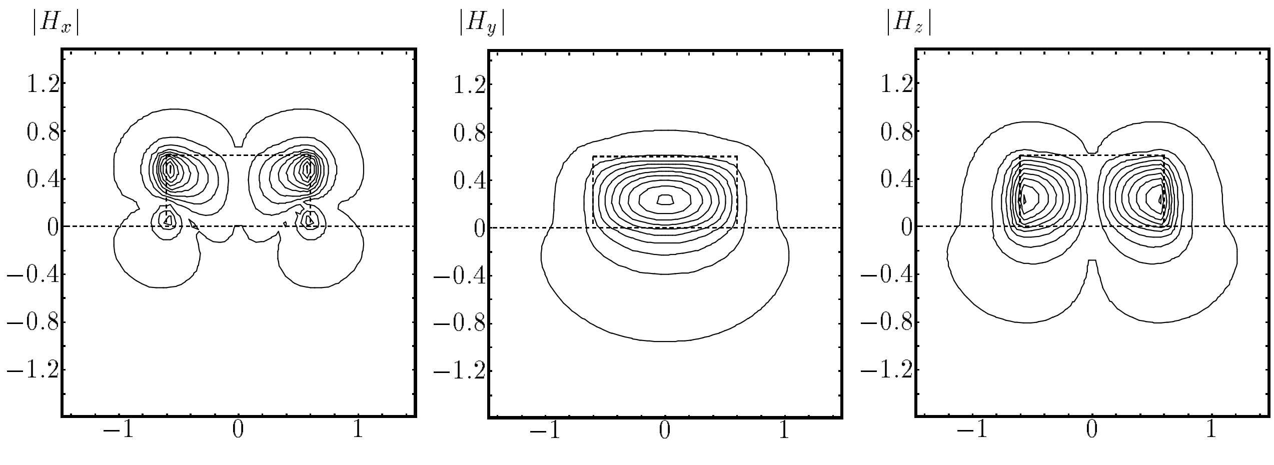


Abb. 42, zur Geometrie 7: Konturliniendiagramme zur Abb. 41. Die Linien bezeichnen in den Bildern unterschiedliche Werte; sie sind jeweils äquidistant zum auftretenden Wertebereich gewählt. Gestrichelte Linien verdeutlichen die modellierte Permittivitätsstruktur. Dargestellt ist jeweils der Rechenfensterbereich, senkrecht: Ort x in μm, waagerecht: Ort y in μm.

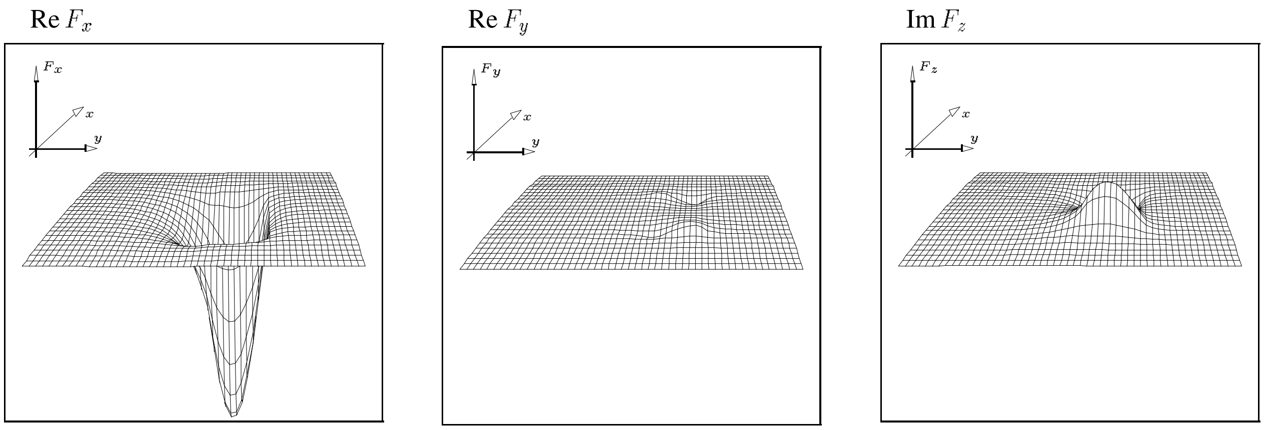


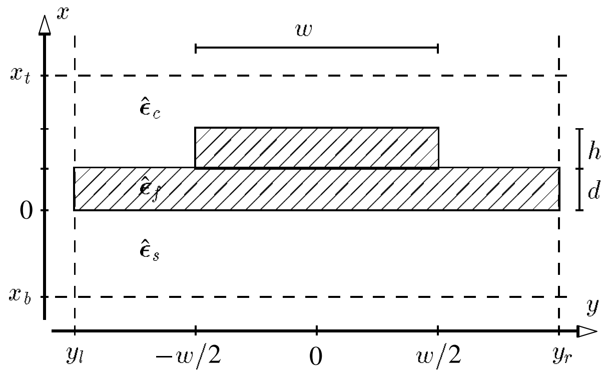
Abb. 43, zur Geometrie 7: Komponenten der durch ein in x–Richtung polarisiertes Anfangsfeld (wie zur Abb. 41) in der um 90^o *im Uhrzeigersinn gedrehten Struktur angeregten Mode, als Funktion des Ortes auf dem Rechenfenster; Blick aus Richtung $-x$ (in der Skizze entsprechend aus Richtung $+y$).*

maßstäbliche Oberflächendiagramme der drei Funktionen. Die Konturliniendiagramme der Abb. 42 sollen dagegen lediglich den Funktionsverlauf verdeutlichen, die Linien sind in den drei Diagrammen bzgl. des jeweiligen Wertebereiches äquidistant gewählt. Die der Abb. 43 zugrundeliegenden Daten sind nicht durch eine Drehung derjenigen zu Abb. 41 entstanden, sondern stammen aus einer Rechnung zur um 90^o im Uhrzeigersinn gedrehten Struktur mit einem x–polarisierten Anfangsfeld. Bis auf Vorzeichen aufgrund des Übergangs $H_y \to H_x,\ H_x \to -H_y$ stimmen die Feldformen überein. Die berechnete Gesamtleistung und die Leistungsanteile sind ebenfalls mit den Kurven der Abb. 37 identisch, wenn man X und Y tauscht. Demnach berücksichtigen die implementierten Algorithmen beide transversalen Feldkomponenten in exakt gleicher Weise, die Simulationen sind echt vektoriell.

Die zugehörigen Werte sind den Endfeldern von Modenanalysen über die Distanzen $N_i \cdot \Delta z_i = 2000 \cdot 0.1\,\mu$m und $N_m \cdot \Delta z_m = 16384 \cdot 2.0\,\mu$m mit den oben genannten Parametern entnommen. Bis auf einen konstanten, vorzeichenbehafteten Faktor besitzen die Komponenten des alternativen Satzes Im F_x, Im F_y, $-$Re F_z denselben Funktionsverlauf. Trägt man das Argument der Werte dieses Endfeldes gegen den Ort auf dem Rechenfenster auf, dann erscheinen bis auf die Randbereiche, die Phasenkorrektur der Randbedingungen, und Sprünge um 2π bzw. Sprünge um π aufgrund der Vorzeichen der reellen Modenfunktionen ebene Flächen, und zwar bei den transversalen Komponenten zum gleichen, bei der longitudinalen Komponente zum dazu um $\pi/2$ versetzten Wert.

5.3 Modenanalysen

In [18] finden sich Ausbreitungskonstanten zu nichtmagnetooptischen Wellenleitern wie in der folgenden Skizze:



Geometrie 8: Rippenwellenleiter

Ein Substrat mit Permittivität $\hat{\epsilon}_s = (3.40^2, 0)$ trägt eine Filmschicht der Dicke d mit Permittivität $\hat{\epsilon}_f = (3.44^2, 0)$ mit aufgesetzter Rippe der Breite $w = 3.0\,\mu$m und Höhe $h = 1.0\,\mu\text{m} - d$ mit gleicher Permittivität $\hat{\epsilon}_f$. Darüber befindet sich Luft ($\hat{\epsilon}_c = (1.0, 0)$). Die modellierte Vakuumwellenlänge ist $\lambda = 1.15\,\mu$m.

Die Modenanalysen dazu verwenden das Rechenfenster $[x_b, x_t]\times[y_l, y_r] = [-2.95, 1.95]\times[-3.95, 3.95]\,\mu\text{m}^2$, diskretisiert mit $N_x = 50$, $N_y = 80$ Punkten zu transversalen Schrittweiten $\Delta x = \Delta y = 0.1\,\mu$m. Die Rechnungen starten mit durch $(x_s, y_s) = (0, 0)\,\mu$m, $r_g = 1.0\,\mu$m, $\alpha_h = \alpha_v = 0^o$, $\alpha_p = 0^o$ bzw. $\alpha_p = 90^o$ gegebenen Gauß'schen Initialisierungen. Das Anfangsfeld wurde jeweils in einer Anpassungsphase $N_i = 2000$ mal über $\Delta z_i = 0.1\,\mu$m, danach zur Bestimmung der Ausbreitungskonstanten $N_m = 16384$ mal über $\Delta z_m = 3.0\,\mu$m fortgesetzt. Als Referenzbrechungsindizes dienten die Ausbreitungskonstanten der Grundmoden mit entsprechender Polarisation nach [18].

Die untenstehende Tabelle enthält für verschiedene Werte d der Filmdicke in den Spalten BPM die effektiven Brechungsindizes β/k_0 zu den am stärksten angeregten Moden, d.h. zu den betragsmäßig größten Spitzen in den Fouriertransformationen der mit obigen Parametern berechneten Korrelationsfunktionen.

Für die in x–Richtung $\alpha_p = \pi/2$ polarisierten Anfangsfelder stimmen diese Werte recht gut mit den in [18] als Ausbreitungskonstanten der TE–Grundmode bezeichneten überein. Die zugehörigen Modenfelder, die Endfelder der Ausbreitungsrechnungen, besitzen starke x– und z– Feldkomponenten, aber nur eine sehr kleine y–Komponente. Die x–Komponente hat auf dem Wellenleiterquerschnitt keine Nullstelle.

Startet man mit einem y–polarisierten Anfangsfeld $\alpha_p = 0$, dann erhält man ebenso polarisierte Modenfelder mit nur sehr kleinen x–Komponenten, nun hat die y–Feldkomponente keine Nullstelle. Nach [18] identifizieren die Ausbreitungskonstanten die berechneten Felder als TM–Grundmoden der untersuchten Wellenleiter.

Die Spalten SI und SVFD der Tabelle enthalten zum Vergleich effektive Brechungsindizes, die nach [18] aus Rechnungen mit der skalaren „spectral–index–method“ stammen bzw. zu Lösungen der semivektoriellen Modengleichungen (siehe [6]) mit finiten Differenzen gehören. Die gleichen Daten sind in Abb. 44 dargestellt.

	TE-Polarisation			TM-Polarisation		
	BPM	SVFD	SI	BPM	SVFD	SI
d/μm	β/k_0	β/k_0	β/k_0	β/k_0	β/k_0	β/k_0
0.0	3.41270	3.41188	3.41202	3.41094	3.41051	3.41064
0.1	3.41279	3.41200	3.41211	3.41104	3.41060	3.41072
0.2	3.41295	3.41217	3.41225	3.41117	3.41073	3.41084
0.3	3.41317	3.41240	3.41244	3.41132	3.41092	3.41100
0.4	3.41346	3.41271	3.41269	3.41156	3.41117	3.41121
0.5	3.41382	3.41310	3.41300	3.41188	3.41150	3.41148
0.6	3.41426	3.41358	3.41339	3.41225	3.41190	3.41183
0.7	3.41480	3.41415	3.41389	3.41271	3.41241	3.41227
0.8	3.41546	3.41484	3.41452	3.41331	3.41303	3.41284

Ausbreitungskonstanten zu den Grundmoden der Wellenleiter mit Geometrie 8 aus BPM–Modenanalysen und Rechnungen mit anderen Methoden (SI und SVFD) aus [18] für verschiedene Filmdicken.

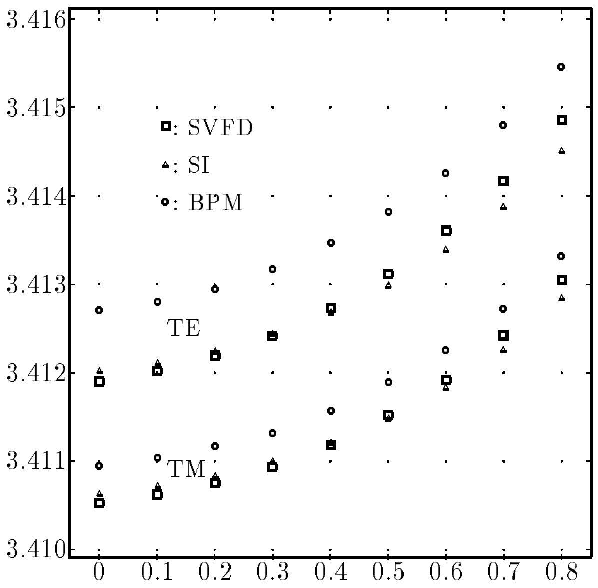


Abb. 44, zur Geometrie 8: Senkrecht: effektive Brechungsindizes β/k_0 der TE– und TM–Grundmoden; waagerecht: Filmdicke d in μm. Kreise bezeichnen die Werte aus BPM–Modenanalysen, Kästchen diejenigen aus SVFD–Rechnungen und Dreiecke die Resultate der SI-Methode.

Zur 3. Zeile der Tabelle $d = 0.2\,\mu$m gehören die in den Abbildungen 45 und 46 gezeigten Modenprofile; dabei verdeutlichen die Konturlinien nur den Funktionsverlauf, die Absolutwerte der Feldkomponenten sind sehr verschieden. Die Maxima der Beträge der x–, y– und z–Modenkomponenten (in dieser Reihenfolge) verhalten sich für die TE–Mode (Abb. 45) wie 1 : 0.02 : 0.68, für die TM–Mode (Abb. 46) wie 0.01 : 1 : 0.10.

Trotz dieser recht zufriedenstellenden Ergebnisse ist die FD–VBPM zur Bestimmung der Modeneigenschaften in diesen Strukturen wegen des großen Zeit– und Speicheraufwandes nicht zu empfehlen. Nach [18] liefert die SI–Methode etwa gleiche Resultate innerhalb von einigen Sekunden, die BPM produziert hauptsächlich für diese Problemstellung nicht interessierende Daten und hat einen Rechenzeitbedarf, der eher in Stunden zu messen ist. Allerdings ist offenbar (siehe (5.4)) nicht von vornherein klar, ob eine skalare Beschreibung des Feldes in unbekannten Wellenleitern ausreicht.

TE–Polarisation

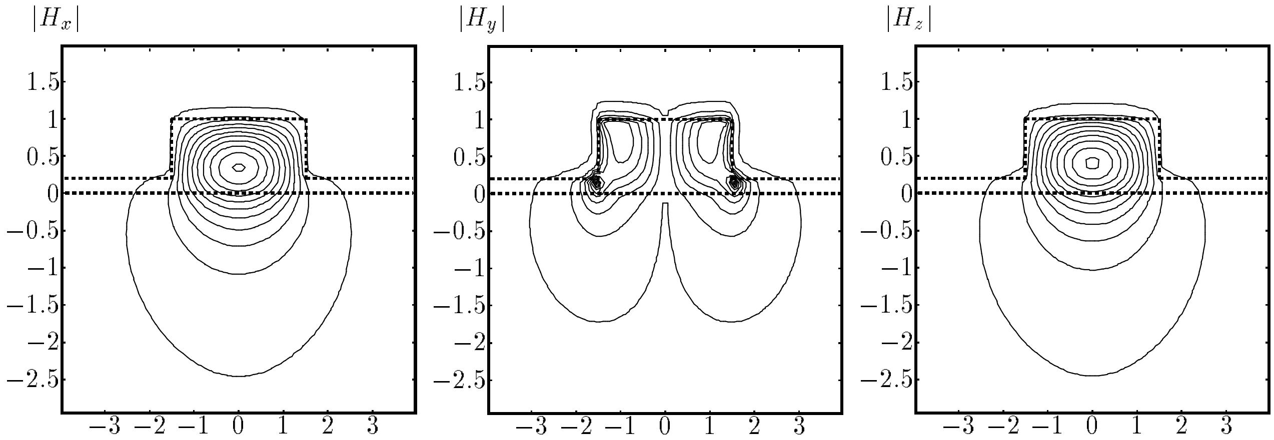


Abb. 45, zur Geometrie 8: Konturliniendiagramme zu den Komponenten der TE–Grundmode des Wellenleiters zu $d = 0.2\,\mu m$. Die Linien bezeichnen in den Bildern unterschiedliche Werte; sie sind jeweils äquidistant zum auftretenden Wertebereich gewählt. Gestrichelte Linien verdeutlichen die modellierte Permittivitätsstruktur. Dargestellt ist jeweils der Rechenfensterbereich, senkrecht: Ort x in μm; waagerecht: Ort y in μm.

TM–Polarisation

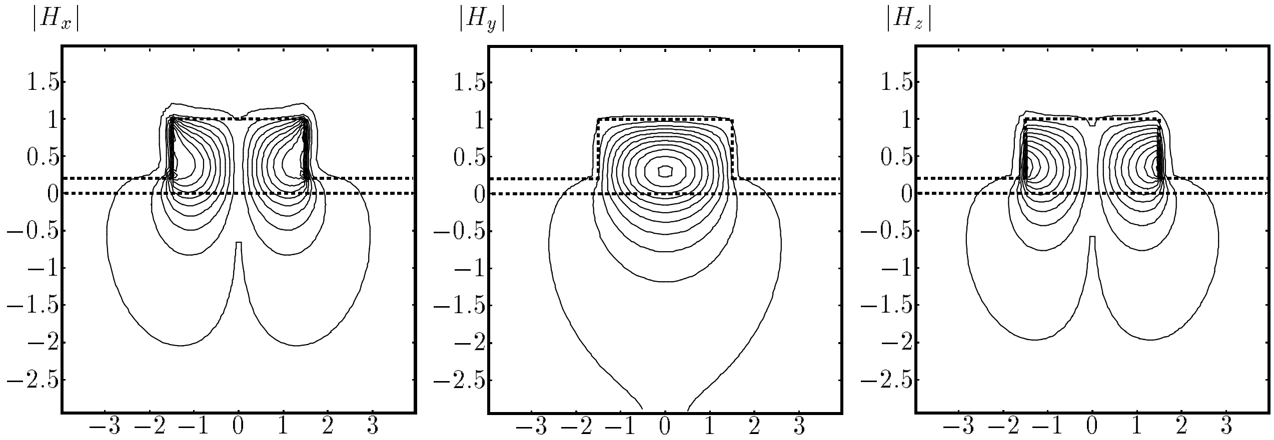
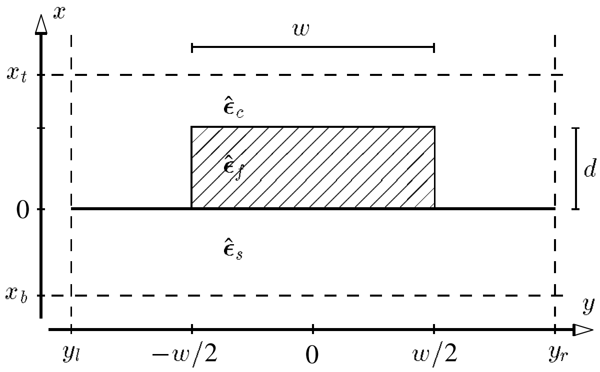


Abb. 46, zur Geometrie 8: Konturliniendiagramme zu den Komponenten der TM–Grundmode des Wellenleiters zu $d = 0.2\,\mu m$. Die Linien bezeichnen in den Bildern unterschiedliche Werte; sie sind jeweils äquidistant zum auftretenden Wertebereich gewählt. Gestrichelte Linien verdeutlichen die modellierte Permittivitätsstruktur. Dargestellt ist jeweils der Rechenfensterbereich, senkrecht: Ort x in μm; waagerecht: Ort y in μm.

5.4 Magnetooptische Schichten

Die Ausbreitungsalgorithmen für magnetisierte Strukturen sollen in Anlehnung an [6] in Wellenleitern wie zur Geometrie 7, mit etwas breiteren Rippen, getestet werden.



Geometrie 9: magnetooptischer Rippenwellenleiter

Die Wellenleiter sind gegeben durch die Permittivitäten $\hat{\epsilon}_s = (3.8025, 0)$, $\hat{\epsilon}_f = (5.3, m_f)$ und $\hat{\epsilon}_c = (1.0, 0)$ in der Trägerschicht, in der aufgesetzten Filmschicht der Höhe d, Breite $w = 2.0\,\mu$m und in der darüber befindlichen Luft. Vakuumwellenlänge ist wieder $\lambda = 1.3\,\mu$m.

Das Rechenfenster $[x_b, x_t] \times [y_l, y_r]$ umfaßt den Bereich $[-1.475, 1.475] \times [-1.725, 1.725]\,\mu\text{m}^2$, diskretisiert mit $N_x = 60$, $N_y = 70$ Punkten zu transversalen Schrittweiten $\Delta x = \Delta y = 0.05\,\mu$m. Alle Rechnungen dazu verwenden durch $(x_s, y_s) = (d/2, 0)\,\mu$m, $\alpha_h = \alpha_v = 0^o$ sowie den Winkel α_p und Radius r_g gegebene Gauß'sche Initialisierungen.

Die ersten Untersuchungen betreffen den isotropen Wellenleiter $m_f = 0$ zur Filmhöhe $d = 0.4\,\mu$m. Dazu erhält man die Leistungskurven der Abb. 47 aus einem y–polarisierten ($\alpha_p = 0^o$) Anfangsfeld zum Radius $r_g = 1.5\,\mu$m mit longitudinaler Schrittweite $\Delta z = 0.05\,\mu$m.

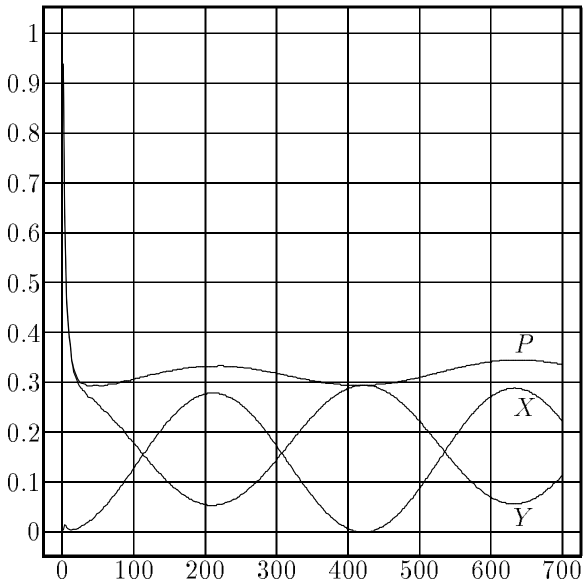


Abb. 47, zur Geometrie 9: Gesamtleistung und Leistungsanteile der Feldkomponenten auf dem Rechenfenster im nichtmagnetisierten Wellenleiter zu $d = 0.4\,\mu m$. Senkrecht: Strahlungsleistungen P, X, Y; waagerecht: Ausbreitungsdistanz z in μm.

Nach einer kurzen Abstrahlungsphase ist die geführte Gesamtleistung weitgehend konstant bis auf eine langwellige Schwingung. Deren Ursache wäre an anderer Stelle zu klären, möglicherweise hilft bereits die Anpassung der Leistungs–Berechnungsformel an die Permittivitätssprünge. Die in den beiden transversalen Feldkomponenten geführten Leistungen ändern sich nach dem Diagramm alternierend mit einer Periodenlänge von 422 μm. Dazu illustrieren die Abbildungen 48 und 49 die Feldformen in der Nähe der Extremstellen der Kurven.

$|H_x|, \quad z = 210\,\mu$m $\qquad$ $|H_y|, \quad z = 210\,\mu$m $\qquad$ $|H_z|, \quad z = 210\,\mu$m

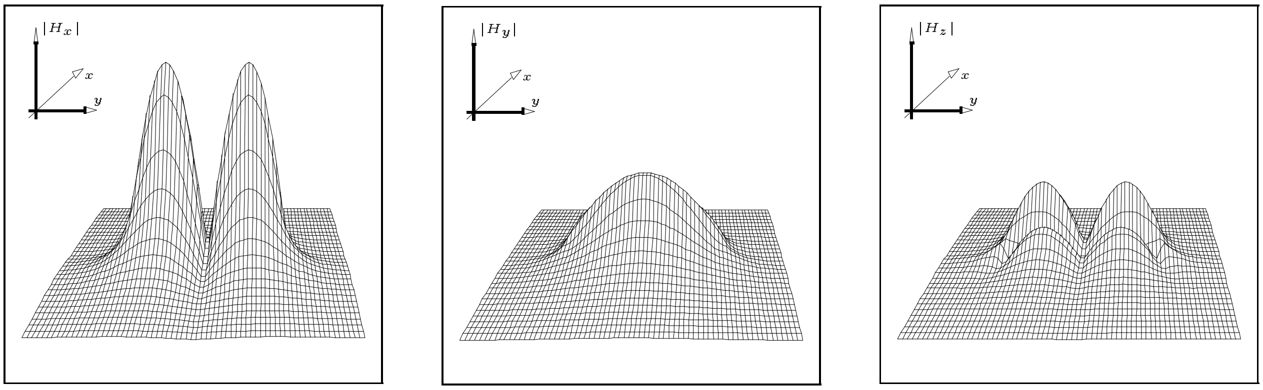


Abb. 48, zur Geometrie 9: Feldstärkebeträge über dem Rechenfenster nach $210\,\mu m$ Ausbreitungsdistanz bei y–polarisierter Gauß'scher Initialisierung im isotropen Wellenleiter, $d = 0.4\,\mu m$; Blick aus Richtung $-x$ des Substrates. Die Bilder sind untereinander und mit denen der Abb. 49 maßstäblich erstellt.

$|H_x|, \quad z = 420\,\mu$m $\qquad$ $|H_y|, \quad z = 420\,\mu$m $\qquad$ $|H_z|, \quad z = 420\,\mu$m

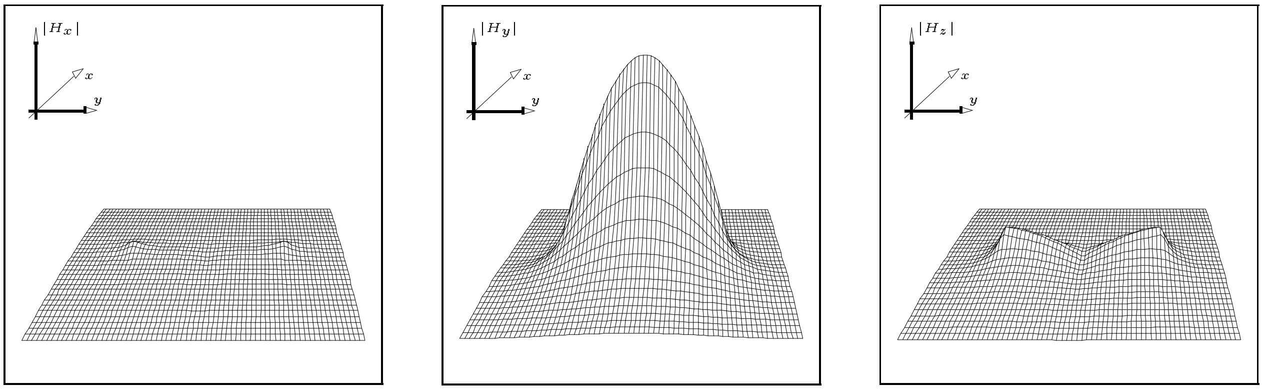


Abb. 49, zur Geometrie 9: Feldstärkebeträge über dem Rechenfenster nach $420\,\mu m$ Ausbreitungsdistanz bei y–polarisierter Gauß'scher Initialisierung im isotropen Wellenleiter, $d = 0.4\,\mu m$; Blick aus Richtung $-x$ des Substrates.

Dieses Verhalten der Leistungskurven läßt sich als Interferenz zweier stark hybrider, nicht eindeutig in einer transversalen Richtung polarisierter Moden deuten. Aus der Modenanalyse des Wellenleiters über die Distanzen $N_i \cdot \Delta z_i = 2000 \cdot 0.1\,\mu$m und $N_m \cdot \Delta z_m = 32768 \cdot 2.0\,\mu$m zu einem Anfangsfeld wie oben mit $r_g = 0.85\,\mu$m, $\alpha_p = 0^o$ und $n_r = 2.01381$ erhält man zwei sehr große Fourierkomponenten der Korrelationsfunktion. Dazu gehören die recht eng beieinanderliegenden Ausbreitungskonstanten $\beta_1 = 9.725414\,\mu\mathrm{m}^{-1}$ und $\beta_2 = 9.740287\,\mu\mathrm{m}^{-1}$. Als Periodenlänge des Interferenzfeldes ergibt sich gerade die in Abb. 47 beobachtete Strecke $2\pi/|\beta_2 - \beta_1| = 422.5\,\mu$m.

Aufgrund der in (3.5.2) genannten Effekte wird bei einer Ausbreitung über derart lange Strecken mit großen Schrittweiten aufgrund der Feldnormierung meistens eine einzelne Mode selektiert, und zwar unabhängig vom Überlappintgral mit dem Anfangsfeld, sofern die zugehörigen Amplitudenfaktoren nicht exakt Null sind. Das äußert sich durch das Verschwinden des Interferenzmusters beispielsweise in den über das Rechenfenster summierten Beträgen der Feldkomponenten; das Feld am Ende einer solchen Rechnung sollte dann zur größten beobachteten Fourierkomponente gehören. Die Abbildungen 50 und 51 zeigen als Modenprofil zur Ausbreitungskonstanten β_2 das Endfeld der oben genannten Modenanalyse. Eine Klassifikation der Mode nach einer dominanten Polarisationsrichtung scheint nicht sinnvoll: die maximalen Beträge der x–, y– und z– Endfeldkomponenten auf dem Rechenfenster verhalten sich wie 0.68 : 1 : 0.28 .

Versuche, aus Anfangsfeldern mit bestimmter Symmetrie und Polarisation auch die andere an der Interferenzerscheinung beteiligte Modenfunktion zu ermitteln, waren nicht erfolgreich.

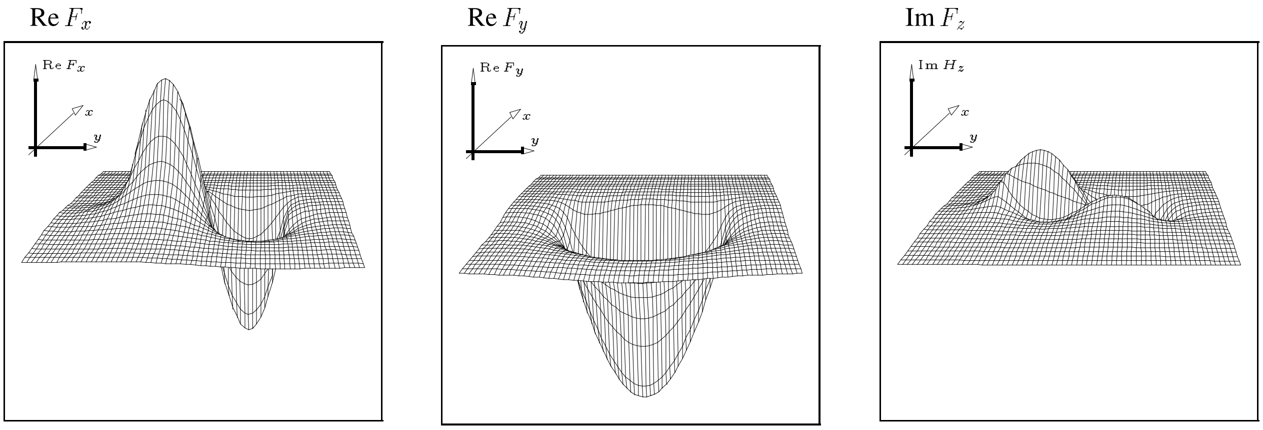


Abb. 50, zur Geometrie 9: Komponenten der Modenfunktion zur Ausbreitungskonstanten $9.74029\,\mu m^{-1}$ des isotropen Wellenleiters mit $d = 0.4\,\mu m$, aufgetragen gegen den Ort auf dem Rechenfenster; Blick aus Richtung $-x$ des Substrates. Die Bilder sind untereinander maßstäblich erstellt.

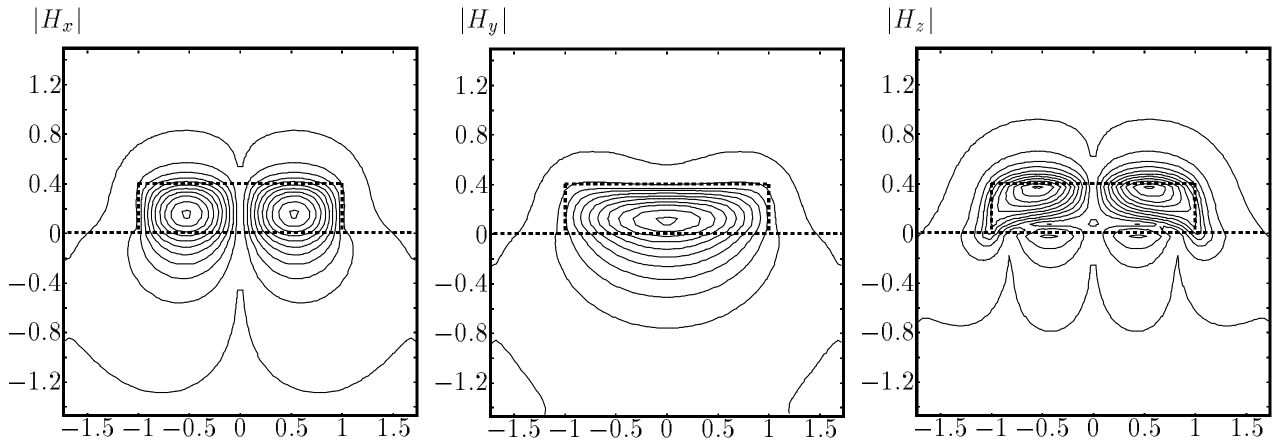


Abb. 51, zur Geometrie 9: Linien mit gleichem Betrag zu den Komponenten der Modenfelder aus Abb. 50. Die Linien sind in den Diagrammen jeweils äquidistant zum auftretenden Wertebereich gewählt. Die Bildränder geben den Rechenfensterbereich an, senkrecht: Ort x in μm, waagerecht: Ort y in μm. Gestrichelte Linien verdeutlichen die Permittivitätsgrenzen.

Die folgende Tabelle stellt die beobachteten vier Ausbreitungskonstanten des Wellenleiters zu $m_f = 0$, $d = 0.4\,\mu$m mit den in [12], [22] vergebenen Bezeichnungen zusammen. Die Werte der Zeile BPM stammen aus oben genannter Rechnung (TM_0, TE_1) bzw. Modenanalysen mit einem Anfangsfeld zu $r_g = 0.6\,\mu$m,

$\alpha_p = 3\pi/4$ (TM_1, TE_0) und jeweils an die gesuchte Ausbreitungskonstante angepaßtem Referenzbrechungsindex. Sie sind der Größe nach angeordnet. Die übrigen Zeilen enthalten Werte aus vektoriellen Modenberechnungen mit finiten Differenzen [12] (VFDM) bzw. skalaren Rechnungen mit finiten Elementen [22] (SFEM).

	TM_1	TM_0	TE_1	TE_0
VFDM	1.950054	2.004366	2.019007	2.083326
SFEM		2.007025	2.022864	2.083654
BPM	1.95656	2.01220	2.01528	2.08344

Effektive Brechungsindizes β/k_0 des isotropen Wellenleiters Nr. 9 zu $d = 0.4\,\mu m$.

Der fehlende Wert der Zeile SFEM liegt außerhalb des durch die Permittivitäten von Film und Substrat gebildeten Intervalls, danach kann der Wellenleiter lediglich drei Moden führen. Die BPM–Werte unterscheiden sich insbesondere für die mit TM_0 und TE_1 bezeichneten hybriden Moden von den Ergebnissen der anderen Methoden, die Differenz dieser Ausbreitungskonstanten ist wesentlich geringer.

Der Vektorcharakter der Moden sollte sich auch auf die Felder in den zugehörigen magnetooptischen Wellenleitern auswirken. In [6] und [24] finden sich zur betrachteten Geometrie die Differenzen der Ausbreitungskonstanten zur TM_0–Mode für wechselnde Vorzeichen der Außerdiogonalelemente $m_f = \pm 0.005$ in Abhängigkeit von der Höhe d der Rippe. Entsprechende Rechnungen lassen sich auch mit der BPM durchführen. Die in den folgenden Tabellen eingetragenen Werte stammen aus Modenanalysen über die Distanzen $N_i \cdot \Delta z_i = 2000 \cdot 0.1\,\mu$m, $N_m \cdot \Delta z_m = 16384 \cdot 2.0\,\mu$m für $m_f = 0$ sowie $N_i \cdot \Delta z_i = 2000 \cdot 0.1\,\mu$m, $N_m \cdot \Delta z_m = 32768 \cdot 4.0\,\mu$m für $m_f = \pm 0.005$ nach Gauß'schen Initialisierungen zu $r_g = 0.6\,\mu$m, $\alpha_p = 0^o$. Referenzbrechungsindex war nach einer ersten solchen Rechnung jeweils der zu den bevorzugten Ausbreitungskonstanten im Wellenleiter mit $m_f = 0$ gemittelte Wert. Zu den Filmdicken $d = 0.35\,\mu$m, $0.4\,\mu$m und $0.45\,\mu$m erhält man je zwei betragsmäßig große Fourierkomponenten. Die erste Tabelle enthält die Ausbreitungskonstanten β_0^m, β_+^m, β_-^m und Differenzen für $m_f = 0$, $m_f = 0.005$, $m_f = -0.005$ zur jeweils größeren von beiden, die zweite diejenigen β_0, β_+, β_- zur kleineren Fourierkomponente. Es ist naheliegend, aber nicht zwingend, die Differenzen als Änderung der Ausbreitungskonstanten zu interpretieren.

$d/\,\mu$m	$\beta_0^m\,/\,\mu$m^{-1}	$\beta_+^m\,/\,\mu$m^{-1}	$\beta_-^m\,/\,\mu$m^{-1}	$\lvert\beta_+^m - \beta_-^m\rvert/\,$cm^{-1}
0.35	9.5720	9.571233	9.572096	8.63
0.40	9.7402	9.739385	9.741015	16.30
0.45	9.8926	9.891833	9.893271	14.38
0.50	10.0318	10.031321	10.032423	11.03
0.55	10.1527	10.152316	10.153227	9.11
0.60	10.2561	10.255812	10.256579	7.67
0.70	10.4192	10.418912	10.419440	5.27
0.80	10.5381	10.538052	10.538388	3.36
0.90	10.6269	10.626660	10.626948	2.88
1.00	10.6942	10.693960	10.694200	2.40

Ausbreitungskonstanten des Wellenleiters Nr. 9 bei verschiedenen Schichtdicken d und $m_f = 0$, $+0.005$, -0.005. Eingetragen sind die Konstanten zur größten Fourierkomponente nach y–polarisierter Gauß'scher Anregung.

$d/\,\mu$m	$\beta_0/\,\mu$m^{-1}	$\beta_+/\,\mu$m^{-1}	$\beta_-/\,\mu$m^{-1}	$\lvert\beta_+ - \beta_-\rvert/$ cm^{-1}
0.35	9.5975	9.597086	9.597755	6.69
0.40	9.7254	9.725568	9.725232	3.36
0.45	9.8454	9.845606	9.845365	2.41

Ausbreitungskonstanten des Wellenleiters Nr. 9 bei verschiedenen Schichtdicken d und $m_f = 0, +0.005, -0.005$. Eingetragen sind die Konstanten zur zweitgrößten Fourierkomponente nach y–polarisierter Gauß'scher Anregung.

Demnach erhält man die größeren Differenzen mit einem wie in [6] dargstellten Verlauf zur Mode mit der größeren Ausbreitungskonstanten. Das ist nach der Klassifikation in [12], [22] für $d = 0.4\,\mu$m die TE_1–Mode, für die sich in der skalaren Beschreibung als Quasi–TE–Mode wie in [6] kaum eine Ausbreitungskonstantenverschiebung zeigen dürfte.

Abb. 52 vergleicht die so gewonnenen Daten mit den Ergebnissen von skalaren Modenanalysen mit finiten Elementen (SFEM) aus [22] und Resultaten zu Rechnungen mit der Methode spektraler Indizes (SIM) nach [24]. Die BPM–Modenanalysen umfassen eine Gesamtdistanz von jeweils $N_m \Delta z_m = 131072\,\mu$m, die spektrale Auflösung ist nicht besser als $\pm 4.8 \cdot 10^{-5}\,\mu$m^{-1}. Jeder Ausbreitungskonstantendifferenz muß man allein deshalb bereits die doppelte Unsicherheit von $\pm 0.96\,$cm^{-1} zuordnen, dargestellt durch die Fehlerbalken in der Abb. 52. Dazu kommen Fehler aufgrund sämtlicher übriger in die Rechnungen eingehender Näherungen, vor allem wegen der recht groben transversalen Diskretisierung (vgl. Abb. 16) und wegen des kleinen Rechenfensters, von denen man aber hoffen kann, daß sie sich durch die Differenzenbildung teilweise kompensieren.

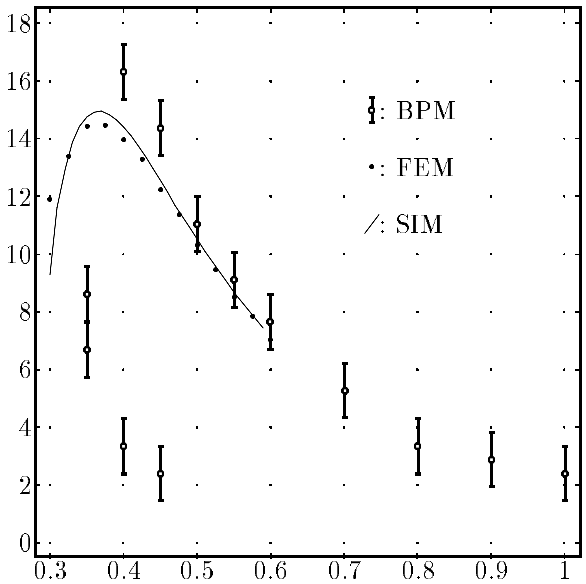
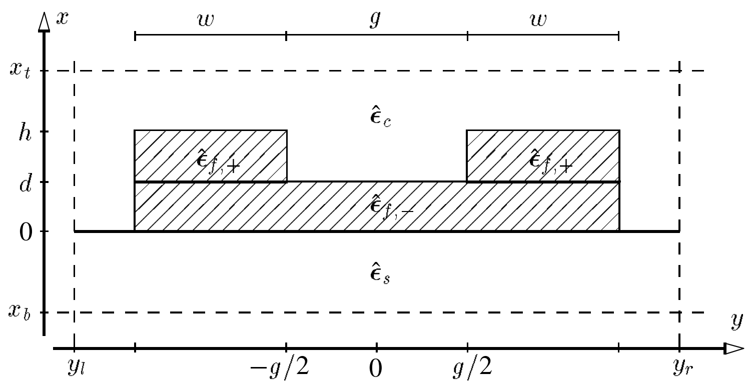


Abb. 52, zur Geometrie 9: Ausbreitungskonstantendifferenzen der TM–Grundmoden (SIM, SFEM) bzw. der durch ein y–polarisiertes Gauß'sches Anfangsfeld angeregten Moden (BPM) für $m_f = \pm 0.005$ als Funktion der Wellenleiterhöhe. Senkrecht: $\Delta\beta$ in cm^{-1}; waagerecht: Höhe d in μm. Die ausgefüllten Kreise und die Linie bezeichnen Daten aus SFEM– bzw. SIM–Modenanalysen. Offene Kreise gehören zu den Resultaten der beschriebenen Ausbreitungsrechnungen. Die Fehlerbalken geben die Unsicherheit aufgrund der endlichen spektralen Auflösung der Modenanalysen an.

Bei diesen Betrachtungen ist eine gewisse Vorsicht geboten, da keinerlei Referenzdaten über Strukturen vorliegen, die nicht klar in einer der transversalen Richtungen polarisierte Modenfunktionen besitzen.

5.5 Wellenleiterkopplung

Die letzten Rechnungen dieser Arbeit modellieren den mittleren, längshomogenen Abschnitt des in der Einleitung vorgestellten Kopplers:



Geometrie 10: magnetooptischer Koppler

Eine Substratschicht mit Permittivität $\hat{\epsilon}_s = (3.8025, 0)$ trägt eine Rippe der Höhe $d = 0.3\,\mu$m, Breite $g + 2w = 2.7\,\mu$m mit Permittivität $\hat{\epsilon}_{f,-} = (5.3, -m_f)$. Darauf sind zwei weitere, entgegengesetzt magnetisierte Rippen aus demselben Material $\hat{\epsilon}_{f,+} = (5.3, +m_f)$ der Breite $w = 1.2\,\mu$m so gesetzt, daß dazwischen ein Spalt der Breite $g = 0.3\,\mu$m bleibt. Die Gesamthöhe der aufgetragenen Schichten ist $h = 0.6\,\mu$m. Bedeckt wird die Struktur von Luft $\hat{\epsilon}_c = (1.0, 0)$, innerhalb soll sich Licht mit der Vakuumwellenlänge $\lambda = 1.3\,\mu$m ausbreiten. Die Analyse wird auf in y–Richtung polarisierte Anfangsfelder beschränkt.

Ein Rechenfenster, das die verfügbaren Rechner gut ausnützt, ist
$[x_b, x_t]\times[y_l, y_r] = [-1.225, 1.225]\times[-2.075, 2.075]\,\mu\text{m}^2$,
überzogen mit einem Gitter aus $N_x = 50$, $N_y = 84$ Punkten bei transversalen Schrittweiten $\Delta x = \Delta y = 0.05\,\mu$m.

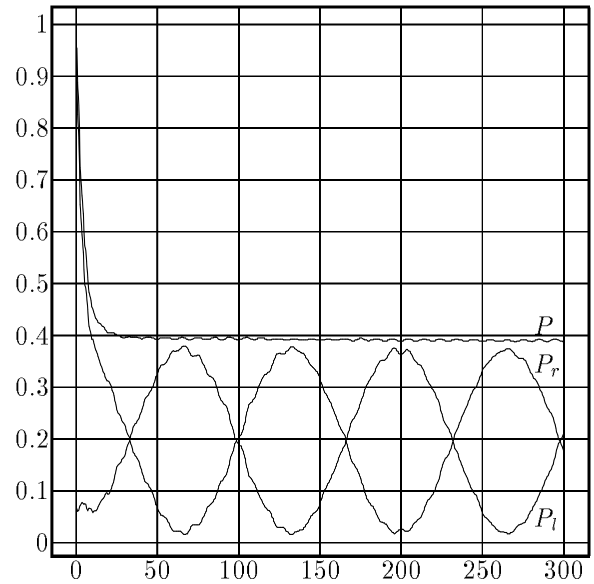


Abb. 53, zur Geometrie 10: Leistungen im isotropen Koppler ($m_f = 0$) nach Gauß'scher Initialisierung im rechten Wellenleiter ($y > 0$). Senkrecht: Gesamtleistung P, Leistungen P_l, P_r auf der linken ($y < 0$) und rechten Rechenfensterhälfte; waagerecht: Ausbreitungsdistanz z in μm.

Aus einer Rechnung zum nichtmagnetisierten Koppler $m_f = 0$ mit longitudinaler Schrittweite $\Delta z = 0.05\,\mu$m, einem Referenzbrechnungsindex $n_r = 2.0938$ und einseitiger Gauß'scher Anregung zu $\alpha_p = \alpha_v = \alpha_h = 0^o$, $r_g = 1.0\,\mu$m in $(x_s, y_s) = (0.3, 0.45)\,\mu$m erhält man die Leistungskurven der Abb. 53. Der Wert n_r gehört zur Ausbreitungskonstanten des Wellenleiters aus (5.2); wie sich herausstellt, liegt er bereits zwischen den Ausbreitungskonstanten der beteiligten Kopplermoden.

Nach einer Abstrahlungsphase stellt sich eine zu den Beobachtungen im planaren Koppler (4.4) analoge Interferenzerscheinung ein, mit der Symmetrieebene $y = 0$. In der Nähe der Extremstellen der Leistungen auf den Rechenfensterhälften ergeben sich die in den Abbildungen 54 und 55 gezeigten Feldformen.

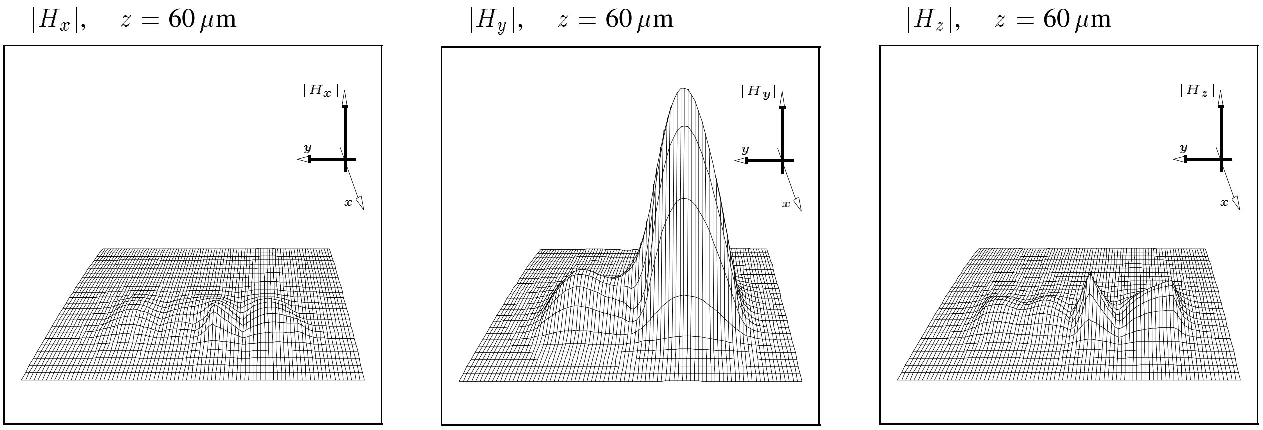


Abb. 54, zur Geometrie 10: Beträge der drei Feldkomponenten in $z = 60\,\mu m$ nach y–polarisierter Gauß'scher Anregung im rechten Wellenleiter; aufgetragen gegen den Ort auf dem Rechenfenster. Blickrichtung ist diesmal die Richtung der Deckschicht $+x$. Die Diagramme sind untereinander und mit denen der Abb. 55 maßstäblich erstellt.

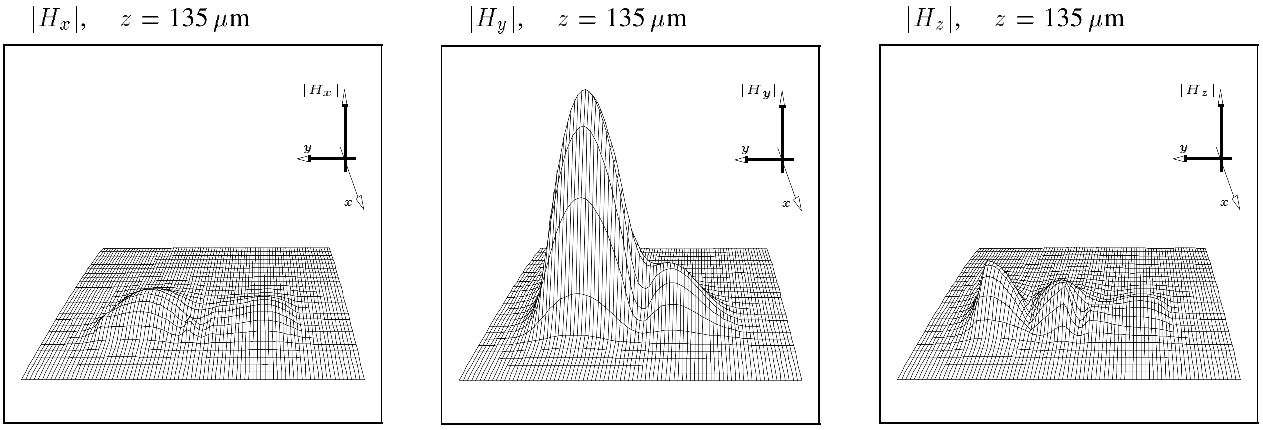


Abb. 55, zur Geometrie 10: Beträge der drei Feldkomponenten in $z = 135\,\mu m$ nach y–polarisierter Gauß'scher Anregung im rechten Wellenleiter; aufgetragen gegen den Ort auf dem Rechenfenster. Blickrichtung ist die Richtung der Deckschicht $+x$.

Wie in (4.4) kann man auch hier durch symmetrisch bzw. antisymmetrisch zur Ebene $y = 0$ kombinierte Anfangsfelder, Gauß'sche Strahlen wie oben in $(x_s, y_s) = (0.3, \pm 0.45)\,\mu$m, je eine einzelne Mode mit gleicher Symmetrie anregen. Entsprechende Modenanalysen zum Koppler mit $m_f = 0$ über die Strecken $N_i \cdot \Delta z_i = 2000 \cdot 0.1\,\mu$m und $N_m \cdot \Delta z_m = 16384 \cdot 2.0\,\mu$m mit derartigen Initialisierungen endeten mit den Feldern der Abbildungen 56, 57 und 58.

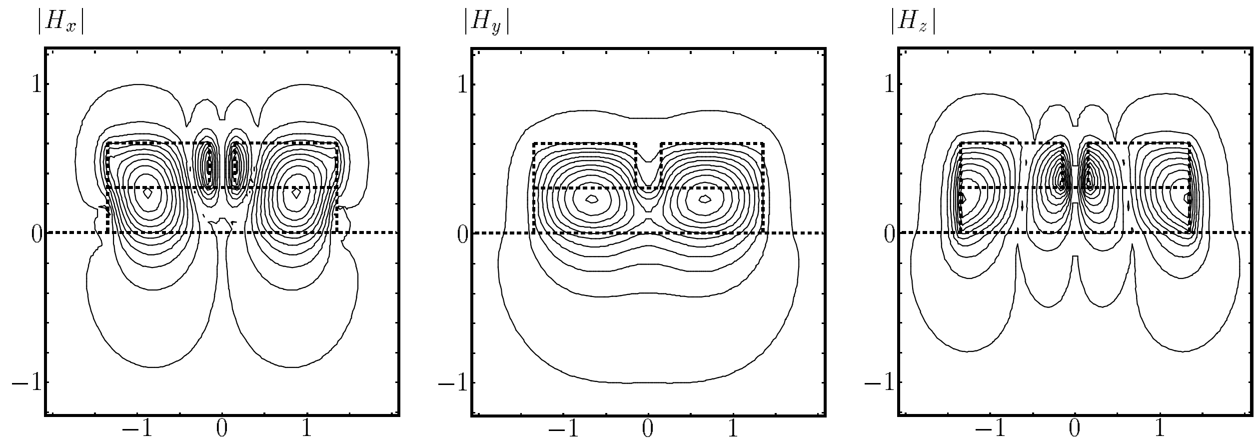


Abb. 56, zur Geometrie 10: Komponenten der symmetrischen Kopplermode ($m_f = 0$). Dargestellt sind Linien mit gleichen Beträgen der Feldkomponenten, jeweils äquidistant zum auftretenden Wertebereich. Die Diagramme zeigen den Rechenfensterbereich, senkrecht: Ort x in μm, waagerecht: Ort y in μm. Gestrichelte Linien deuten die Permittivitätsgrenzen an.

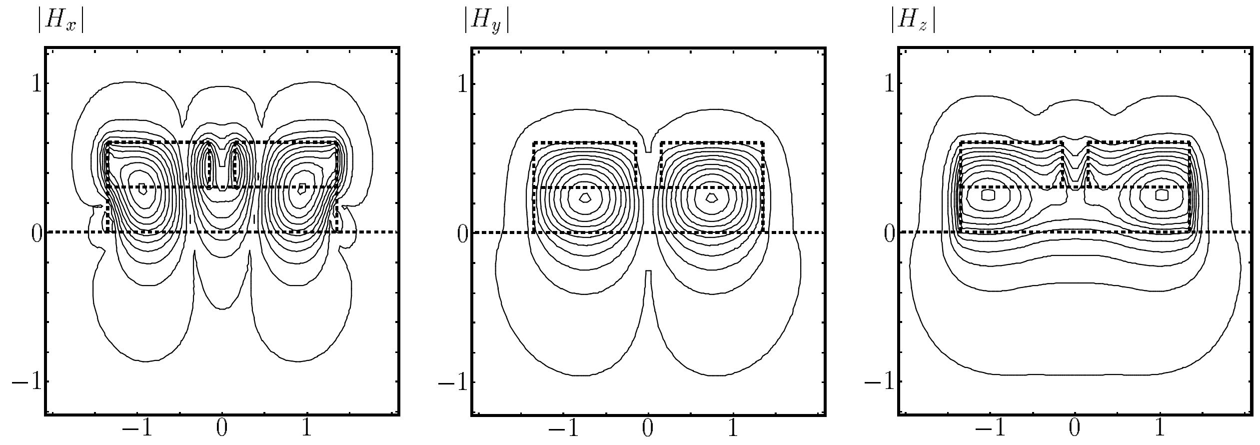
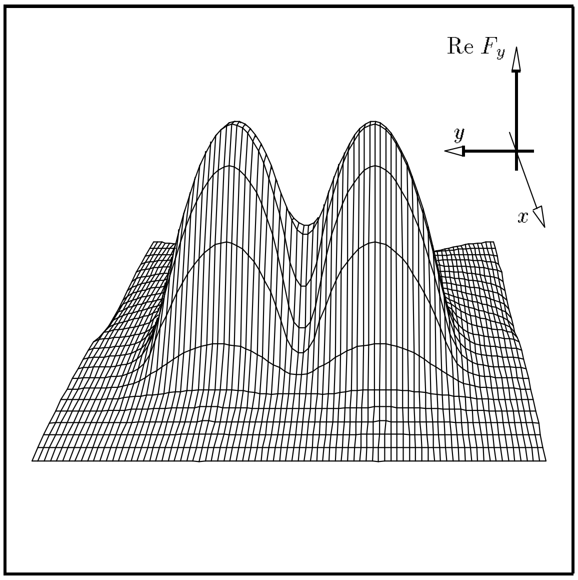


Abb. 57, zur Geometrie 10: Komponenten der antisymmetrischen Kopplermode ($m_f = 0$). Dargestellt sind Linien mit gleichen Beträgen der Feldkomponenten, jeweils äquidistant zum auftretenden Wertebereich. Die Diagramme zeigen den Rechenfensterbereich, senkrecht: Ort x in μm, waagerecht: Ort y in μm. Gestrichelte Linien deuten die Permittivitätsgrenzen an.



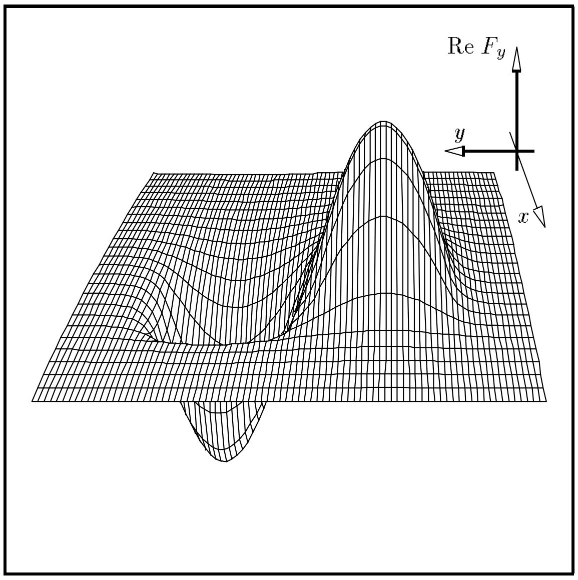


Abb. 58, zur Geometrie 10 und den Abbildungen 56 und 57: y–Komponenten der symmetrischen (links) und antisymmetrischen (rechts) Kopplermoden zu $m_f = 0$. Dargestellt ist der Realteil der y–Komponenten aus den Endfeldern geeigneter Modenanalysen als Funktion des Ortes auf dem Rechenfenster; Blickrichtung ist die Richtung der Deckschicht $+x$. Die Diagramme sind untereinander nicht maßstäblich.

Die zur Ebene $y = 0$ symmetrische Mode (Index s) besitzt die Ausbreitungskonstante $\beta_s = 10.16645\,\mu\text{m}^{-1}$, zur antisymmetrischen gehört der Wert $\beta_a = 10.11920\,\mu\text{m}^{-1}$. Daraus erhält man für die isotrope Struktur die Koppellänge $L = 66.5\,\mu$m, diese Strecke findet sich auch in Abb. 53 wieder.

Beide Moden sind weitgehend in y–Richtung polarisiert. Die maximalen Beträge der x–, y– und z–Feldkomponenten verhalten sich für die symmetrische Mode wie $0.10 : 1 : 0.21$, für die antisymmetrische wie 0.07 : 1 : 0.26.

Im Hinblick auf eine Verwendung des Kopplers als Isolator interessieren wieder die Ausbreitungskonstanten in der magnetisierten Struktur. Die folgenden Tabellen stellen die Ergebnisse aus Rechnungen wie oben für verschiedene Lichtrichtungen im Koppler mit $|m_f| = 0.1$, die daraus wie in (4.4) berechneten Koppellängen und die benötigte Länge L_D des Isolatorbauteiles zusammen:

$\|m_f\|$	$\frac{\beta_{s,+}}{\mu\text{m}^{-1}}$	$\frac{\beta_{s,-}}{\mu\text{m}^{-1}}$	$\frac{\beta_{a,+}}{\mu\text{m}^{-1}}$	$\frac{\beta_{a,-}}{\mu\text{m}^{-1}}$	$\frac{\|\beta_{s,+}-\beta_{s,-}\|}{\text{cm}^{-1}}$	$\frac{\|\beta_{a,+}-\beta_{a,-}\|}{\text{cm}^{-1}}$
0	10.16645		10.11920			
0.1	10.13767	10.19825	10.08749	10.15401	606	665

$\|m_f\|$	$L_+/\,\mu$m	$L_-/\,\mu$m	$L_D/\,\mu$m
0	66.5		
0.1	62.6	71.0	529

Die Beträge $|m_f|$ wurden unrealistisch groß gewählt, um bereits bei kürzeren Distanzen $N_m \Delta z_m$ Differenzen zwischen den Ausbreitungskonstanten zu erhalten, die genügend größer als die spektrale Auflösung der Modenanalyse sind. Unter der Annahme, daß die in (4.4) beobachtete Proportionalität $L_D \sim |m_f|^{-1}$ auch in dieser Situation zutrifft, müßte ein realer Isolator gleicher Geometrie mit $|m_f| = 0.005$ eine Länge von etwa 10.6 mm erhalten.

6 Abschließende Bemerkungen und Zusammenfassung

Es bleibt eine Vielzahl von Möglichkeiten, die in dieser Arbeit vorgestellten Rechnungen zu erweitern:

- In bestimmten Wellenleitern wie in (5.4) liefern die vektoriellen BPM–Rechnungen Modenfelder und Ausbreitungskonstanten, die von denen der skalaren Methoden verhältnismäßig stark abweichen. Ohne eine weitere unabhängig von dieser Arbeit implementierte vektorielle Berechnungsmethode lassen sich Programmier– oder Rechenfehler (vgl. (3.1)), die nur in derartigen Fällen wirksam werden, trotz umfangreicher Kontrollen nicht ausschließen.
- Die Rechnungen starten mit einer Anzahl von recht willkürlich gewählten Parametern (beispielsweise dem Referenzbrechungsindex n_r, dem Diskretisierungsparameter α oder den ATBC–Referenzfeldern), deren Wahl noch eingehender zu untersuchen ist.
- Nach (4.1) scheint die TBC–Korrektur der wichtigste Teil der ATBC–Randbedingungen zu sein. Möglicherweise lassen sich die festen Differenzenschemata auch auf andere Weise als durch das in (3.4.2) vorgeschlagene Näherungsverfahren erzeugen (vgl. [1]).
- Anstelle der letzten Zeile der Gleichung (17) könnte man die Divergenzgleichung (5) als Ausbreitungsgleichung für die longitudinale Magnetfeldkomponente verwenden. Das reduziert vermutlich die Anzahl der Einträge in den Ausbreitungsmatrizen, möglicherweise ergeben sich auch positive Auswirkungen auf die Schwingungen in den Leistungskurven der dreidimensionalen Ausbreitungsrechnungen.
- Die meisten der vorgestellten Ergebnisse lassen sich auch mit entsprechenden Modenberechnungen erzielen. Es bleibt offen, inwiefern die während der immer auftretenden Abstrahlungsphasen berechneten Felder tatsächlich einer physikalischen Realität gleichen. Wünschenswert wäre also eine Implementation zur vektoriellen Modenberechnung; auch, um weitere Referenzen für die BPM–Resultate zu erzeugen.
- Man kann die berechneten Felder eingehender analysieren: Aus den Feldwerten der drei Komponenten des Magnetfeldes erhält man über die Rotationsgleichung (6) die Feldwerte des elektrischen Feldes. Damit läßt sich der komplette Satz $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ als Funktion des Ortes im Wellenleiter illustrieren. Neben den Ausbreitungskonstanten unterscheiden sich auch die Modenformen und ihre Interferenzfiguren in einer magnetooptischen Struktur für verschiedene Lichtrichtungen, und zwar vermutlich in der gleichen kleinen Größenordnung wie die Ausbreitungskonstanten. Entsprechende Differenzdiagramme sollte die BPM ebenfalls liefern.
- Vermutlich läßt sich die Ausbreitungsmethodik auch auf andere Formen des Permittivitätstensors übertragen, die Einschränkungen in Kapitel 2 scheinen unnötig starr. Beispielsweise wäre es sinnvoll, verschiedene Diagonalelemente oder eine andere Stellung der Außerdiagonalelemente zuzulassen.
- In vielen Strukturen reicht offenbar eine skalare Beschreibung des elektromagnetischen Feldes aus, wenn man sich auf eine Polarisationsrichtung beschränkt. Für solche Wellenleiter sind die vektoriellen Rechnungen unnötig aufwendig; es bietet sich an, die kleineren Feldkomponenten zu vernachlässigen und nur eine Komponente auszubreiten. Für die TM–Polarisation gehen die entsprechenden Formeln direkt aus den angegebenen hervor, für die TE–Polarisation muß der Formalismus auf das elektrische Feld umgesetzt werden. Man erhält dann vermutlich Algorithmen, die um ein Vielfaches schneller sind bzw. kleinere transversale Schrittweiten ermöglichen; das wäre im Hinblick auf längsinhomogene Strukturen wichtig. Mit der hier vorgestellten BPM läßt sich prüfen, ob diese Quasi–TE/TM–Näherung für unbekannte Wellenleiter geeignet ist.

- Auch in der dreidimensionalen Situation sollte es möglich sein, die vektorielle BPM auf längsinhomogene Wellenleiter anzuwenden. Derlei Simulationen werden allerdings auch auf größeren Maschinen einen immensen Zeitbedarf besitzen, zudem sind verglichen mit dem planaren Fall eher größere Schwierigkeiten an den Übergängen zwischen längshomogenen Abschnitten zu erwarten. Für umfangreichere Untersuchungen z.B. zum Einfluß verschiedener Geometrieparameter wie in (4.6) ist das Verfahren vermutlich zu aufwendig.

- Schließlich bleibt zu überlegen, ob man mit drei Feldkomponenten Anfangsfelder für Wellenleiter mit größeren Brechzahlunterschieden angeben kann, die plausibler sind als die meistens verwendeten Gauß'schen Strahlen. Betrachtet man die Stetigkeitsbedingungen der elektromagnetischen Felder an einem Permittivitätssprung in Ausbreitungsrichtung, dann scheint es notwendig, auch die z–Ableitung des Anfangsfeldes vorzugeben. Das stellt die Fresnel'sche Näherung in Frage und legt Rechnungen mit auch in Ausbreitungsrichtung zentrierten Differenzenquotienten nahe.

Zusammenfassung

Diese Arbeit zeigt, daß voll vektorielle Ausbreitungsrechnungen mit finiten Differenzen in dreidimensionalen, nicht isotropen Strukturen möglich sind.

Für Permittivitätstensoren, die transversal zur Ausbreitungsrichtung magnetisierte magnetooptische Materialien beschreiben, erhält man aus den Maxwell–Gleichungen eine vektorielle Ausbreitungsgleichung für die drei Komponenten des Magnetfeldes, wenn man sich auf eine Lichtrichtung und paraxiale Felder beschränkt. Die Näherungen werden umso schlechter, je größer die Brechzahlunterschiede in der modellierten Struktur sind.

Im Rahmen der Methode der finiten Differenzen geht die Ausbreitungsgleichung auf einer festen Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung zunächst in einen Satz von Differenzenschemata für ein Punktgitter auf einem endlichen Rechenfenster über. In diese Schemata lassen sich die Stetigkeitsbedingungen des elektromagnetischen Feldes an den Permittivitätssprüngen der modellierten Struktur einarbeiten. Nach der Diskretisierung auch in der Ausbreitungsrichtung entsteht daraus ein großes, aber nur schwach besetztes komplexes lineares Gleichungssystem, das die schrittweise Lösung der Ausbreitungsgleichung in längshomogenen Wellenleitern erlaubt. Längsinhomogene Strukturen lassen sich näherungsweise ebenfalls untersuchen, wenn man sie abschnittweise durch längshomogene ersetzt. Geeignete Verfahren zur Behandlung der Rechenfensterränder ergänzen die Ausbreitungsmethodik; in dieser Arbeit wurden die als Transparente Randbedingungen bezeichneten Algorithmen zu einer etwas effizienteren Methode mit vergleichbarer Leistungsfähigkeit abgeändert.

In den beiden letzten Teilen sind die Ergebnisse aus der Implementation der Ausbreitungsmethode zu zwei– und dreidimensionalen Wellenleiterstrukturen dokumentiert. Vergleiche mit analytischen bzw. numerischen Modenberechnungen (aus anderen Quellen) führten meistens auf gut übereinstimmende Resultate; größere Unterschiede traten nur bei einer Rippenwellenleitergeometrie mit stark hybriden Modenformen auf. Im planaren Fall beschränken sich die Untersuchungen auf TM–polarisierte Felder, in der dreidimensionalen Situation auf längshomogene Strukturen.

Wenn man gewisse Schwachstellen im Auge behält, dann lassen sich die dazu erstellten Programme als verhältnismäßig einfach anzupassende und robuste, aber recht aufwendige Werkzeuge zur Analyse entsprechender Wellenleiterstrukturen nutzen.

Literaturangaben

[1] J. G. Blaschak, G. A. Kriegsmann. A Comparative Study of Absorbing Boundary Conditions. *Journal of Computational Physics*, 77:109–139, 1988.

[2] Y. Chung, N. Dagli. An Assessment of Finite Difference Beam Propagation Method. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 26(8):1335–1339, 1990.

[3] H. Dötsch, P. Hertel, B. Lührmann, S. Sure, H. P. Winkler, M. Ye. Applications of Magnetic Garnet Films in Integrated Optics. *IEEE Transactions on Magnetics*, 28(5):2979–2984, 1992.

[4] A. Erdmann. Beam–propagation analysis of magneto–optic waveguide couplers. In C. C. Righini, D. Yevick (Hrsg.), *Linear and Nonlinear Integrated Optics*, S. 675–685, 1994. SPIE Proceedings, Vol. 2212.

[5] A. Erdmann, M. Shamonin, P. Hertel, H. Dötsch. *Design of nonreciprocal couplers for integrated optics*. Fachbereich Physik der Universität Osnabrück, 1993.

[6] A. Erdmann, M. Shamonin, P. Hertel, H. Dötsch. Finite difference analysis of gyrotropic waveguides. *Optics Communications*, 102(1,2):25–30, 1993.

[7] M. D. Feit, J. A. Fleck. Light propagation in graded–index optical fibers. *Applied Optics*, 17(24):3990–3998, 1978.

[8] M. D. Feit, J. A. Fleck. Calculation of dispersion in graded–index multimode fibers by a propagating–beam method. *Applied Optics*, 18(16):2843–2851, 1979.

[9] J. Gerdes. *Effiziente Analyse längsinhomogener integriert–optischer Wellenleiter*. VDI – Verlag, Düsseldorf, 1993. VDI Fortschritts–Berichte, Reihe 21: Elektrotechnik, Nr. 138.

[10] G. R. Hadley. Transparent boundary condition for beam propagation. *Optics Letters*, 16(9):624–626, 1991.

[11] G. R. Hadley. Transparent Boundary Condition for the Beam Propagation Method. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 28(1):363–370, 1992.

[12] S. Haverkamp. *Berechnung von Streifenwellenleitern mit der Methode der Finiten Differenzen*. Fachbereich Physik der Universität Osnabrück, 1993.

[13] P. Hertel. *Lineare und nichtlineare Antwort auf Störungen des thermodynamischen Gleichgewichtes durch zeitveränderliche elektrische Felder*. Fachbereich Physik der Universität Osnabrück, 1992.

[14] P. Hertel. *Numerische Behandlung Partieller Differentialgleichungen*. Skript zur Vorlesung im Fachbereich Physik an der Universität Osnabrück, WS 92/93.

[15] W. Huang, C. Xu, S. Chu, S. K. Chaudhuri. The Finite Difference Vector Beam Propagation Method: Analysis and Assessment. *Journal of Lightwave Technology*, 10(3):295–305, 1992.

[16] K. S. Kundert. *Sparse User's Guide: A Sparse Linear Equation Solver*. (Version 1.3.a). Department of Electrical Engineering and Computer Sciences, University of Califonia, Berkeley.

[17] P. E. Lagasse, R. Baets. The Beam Propagation Method in Integrated Optics. In L. B. Felsen (Hrsg.), *Hybrid Formulation of Wave Propagation and Scattering*, S. 375–393, Dordrecht, Boston, Lancaster, 1984. Martinus Nijhoff Publishers.

[18] P. W. A McIlroy. Spectral Index Method: Single Rib Waveguide. In P. N. Robson, P. C. Kendall (Hrsg.), *Rib Waveguide Theory by the Spectral Index Method*, New York, 1990. Wiley.

[19] W. Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik, Bd. 3: Elektrodynamik*. Verlag Zimmermann – Neufang, Ulmen, 1990.

[20] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, 1986.

[21] H.-J. Reiffen, H. W. Trapp. *Differentialrechnung*. B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1989.

[22] R. Schoppenhauer. *Berechnung magnetooptischer Streifenwellenleiter mit der Methode der Finiten Elemente*. Fachbereich Physik der Universität Osnabrück, 1994.

[23] H. R. Schwarz. *Numerische Mathematik*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1988.

[24] M. Shamonin, P. Hertel. Analysis of non–reciprocal mode propagation in magneto–optic rib–waveguide structures with the spectral–index method. *Applied Optics*, 33(27):6415–6421, 1994.

[25] J. Van Roey, J. van der Donk, P. E. Lagasse. Beam Propagation Method: Analysis and Assessment. *Journal of the Optical Society of America*, 71(7):803–810, 1981.

[26] C. Vassallo. Reformulation for the Beam Propagation Method. *Journal of the Optical Society of America*, 10(10):2208–2216, 1993.

[27] D. Yevick. A guide to electric field propagation techniques for guided–wave optics. *Optical and Quantum Electronics*, 26:185–197, 1994.

Gemäß §17(5) der Diplomprüfungsordnung versichere ich hiermit, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Osnabrück, den 19. Januar 1995